Universiteit Gent
Faculteit Wetenschappen
Vakgroep Zuivere Wiskunde

Permanenten: een link tussen verleden, heden en toekomst door stellingen, vermoedens en secundair onderwijs

Kwinten Verbruggen

Promotor: Prof. Dr. Tom De Medts
Medepromotor: Prof. Dr. Hendrik Van Maldeghem

Masterproef ingediend tot het behalen van
de academische graad van master in de wiskunde.

Academiejaar 2017-2018

Voorwoord

Elke wijze uil begon als uilskuiken.

Enerzijds hoop ik eerlijkheidshalve van mezelf te kunnen zeggen dat ik in academiejaar 2013-2014 niet als een uilskuiken aan de opleiding wiskunde aan de UGent begon. Anderzijds ben ik ervan overtuigd die status van wijze uil nog verre van bereikt te hebben, maar er de voorbije jaren wel een stevig fundamendent voor gebouwd te hebben. Een fundament dat me een basis biedt om aan een levenslange wijselijke weg te timmeren, convergerend naar die wijze uil. Dat zie ik – eindelijk – vooral graag in vervulling gaan in het wiskundig onderwijsveld, wat aanleiding heeft gegeven om naast een grondig inhoudelijk onderzoek van een wiskundig concept ook een didactisch luik aan deze thesis toe te voegen. Waar ik op dit moment dan eigenlijk sta? Ergens halverwege in het ontwikkelingstraject tussen dat uilskuiken en die wijze uil, schat ik.

In dat ontwikkelingstraject, dat voor een aanzienlijk deel gepaard ging met het schrijven van deze masterproef, stond ik er gelukkig niet alleen voor. Door verschillende mensen werd ik sterk gesteund in mijn denken en doen. Het lijkt me daarom zeer gepast om de voornaamste steunpilaren hier uitdrukkelijk voor te bedanken.

Eerst en vooral wens ik mijn grote dank te betuigen aan begeleider en promotor prof. dr. Tom De Medts: voor het openstaan voor de richting die ik met deze masterproef uit wou gaan, voor zijn terechte feedback en inhoudelijke ondersteuning, voor zijn toewijding. Tevens gaat mijn oprechte dank ook uit naar prof. dr. Hendrik Van Maldeghem voor de interesse in en de begeleiding van het didactische onderdeel van deze thesis.
Daarnaast wens ik collega's Yvan De Kerpel, Greet Van Herpe en Krista Meersman hartelijk te bedanken voor hun oprechte interesse.
Tot slot wil ik een dankwoord richten aan mijn mama, zus, peter en oma's, voor hun bereidwillig luisterend oor en hun onvoorwaardelijke aanmoedigingen gedurende mijn hele opleiding.
Opa, dit resultaat draag ik in het bijzonder op aan jou.
Een laatste voorwoord richt ik speciaal tot medestudent Dago Van Poeck: enorm bedankt om in het bijzonder de voorbije vijf jaren mijn steun en toeverlaat te zijn, zowel op wiskundig als op persoonlijk vlak.

Toelating tot bruikleen

De auteur geeft de toelating deze masterproef voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van de masterproef te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit deze masterproef.

Kwinten Verbruggen
mei 2018

Inhoudsopgave

Inleiding

Al vanaf het vijfde middelbaar wisten matrices en bijhorende concepten zoals determinanten mij sterk te boeien. Dat de rijke theorie van (bijzondere) matrices nog zeer veel andere bijhorende begrippen en vertakkingen kent, werd me duidelijk doorheen de verschillende algebraïsche én numerieke analytische vakken die in de universitaire opleiding wiskunde werden onderricht. Het zou naïef geweest zijn te denken dat ik naar het einde van deze opleiding toe op zijn minst met elke matrix-gerelateerde operatie doorheen de voorbije jaren eens in aanraking zou gekomen zijn. Toch was ik enigszins verrast toen ik bij het zoeken naar een mogelijk hierbij aansluitend thesisonderwerp op het vrij recente artikel *Open problems in matrix theory* stuitte (zie [53]), waarin meer dan twintig onopgeloste problemen met betrekking tot matrices beknopt stonden beschreven. Waar ik in eerste instantie nog dacht enkele van deze problemen onder de loep te nemen in mijn masterproef, werd ik er al snel mee geconfronteerd dat de verdieping in elk open probleem afzonderlijk een werk van lange adem zou zijn. Op dat punt gekomen, raadde begeleider en promotor prof. dr. Tom De Medts aan om het concept 'de permanent van een matrix' in detail te bestuderen; een concept dat in meerdere van die open problemen bleek op te duiken en informeel kan worden uitgedrukt als een determinanent zonder mintekens. Het betekende de start van een ongelofelijk boeinde ontdekkingstocht, waarbij ik meermaals versteld stond over het wijdreikende bestaan van permanenten, zonder er vooraf ooit van te hebben gehoord.

In een eerste luik van deze masterproef spits ik me in een uitgebreid onderzoek toe op permanenten. In eerste instantie op allerhande feiten (eigenschappen, stellingen, toepassingen) uit een eeuwenlang *verleden*. In een gevorderd stadium leg ik de link naar recentere ontdekkingen over permanenten en meer bepaald vermoedens die wiskundigen wereldwijd tot op *heden* weten te intrigeren.
Na een eerste vrij kort hoofdstuk waarin voorkennis wordt opgefrist en/of aangescherpt over enkele bijzondere types matrices die verderop in uiteenzettingen frequent terugkeren, vormt het tweede hoofdstuk het corpus van de permanent. In een logische opbouw worden hier in verschillende secties eigenschappen, (nood aan alternatieve) berekeningswijzen en zeer uiteenlopende interpretaties en toepassingsvelden van permanenten nader bestudeerd.
Een laatste sectie van hoofdstuk twee bevat een aantal identiteiten en vooral heel wat afschattingen met betrekking tot permanenten. Naast de stelling van Frobenius-König wordt de focus hier voornamelijk gelegd op ongelijkheden met permanenten van binaire matrices, dubbelstochastische matrices en positief semi-definitiete matrices. De motivatie hiervoor is drievoudig: de weergegeven stellingen en hun bewijzen vormen ofwel een fundamenteel resultaat binnen de theorie van permanenten, ofwel een mooie illustratie van een eerder aangehaalde interpretatie van de permanent, ofwel een resultaat dat in het derde hoofdstuk handig zal kunnen worden aangewend.
Dat laatste hoofdstuk legt de link naar het initiële idee dat aan de basis van deze thesis lag: het bestuderen van de vorderingen van pogingen tot het beantwoorden van een vraag uit de matrixtheorie gekoppeld aan permanenten. Dit is uitgedraaid op het onderzoek naar de minimale waarde die de permanent van een dubbelstochastische matrix kan bereiken, dat bijna een eeuw geleden gekend stond als het vermoeden van Van der Waerden en enkele decennia geleden voor het eerst bewezen werd. Zowel het tevergeefs onbewezen ideeëngoed als de samenvallende puzzelstukken waaruit dit bewijs tot stand is gekomen, worden in een eerste sectie blootgelegd.

Nadien wordt een alternatief bewijs vanuit een helemaal andere invalshoek uitvoerig bestudeerd. Het onderzoeksluik eindigt ten slotte met een bespreking van het vermoeden van Dittert, dat enigszins in het verlengde ligt van het vermoeden van Van der Waerden en dus een passende afsluiter vormt van dit hoofdstuk.

Het boek *Permanents – Encyclopedia of Mathematics and Its Applications* van Marvin Marcus en Henryk Minc (zie [39]) fungeerde in deze onderzoekscomponent als een onontbeerlijk basiswerk. Voor een eerste kennismaking met definities, lemma's en stellingen over permanenten ervoer ik het als een ideale leidraad in mijn zoektocht en ontwikkeling doorheen dit onderwerp. Onder meer het ontbreken van de bespreking van een bijzonder geval bij een afschatting met betrekking tot permanenten en het gedateerd zijn van sommige vermoedens die intussen reeds als volwaardige stellingen door het leven gaan, hebben ertoe geleid dat ik – gelukkig maar – ook genoodzaakt was om vele andere interessante (en recentere) bronnen te hanteren.

Naast de onderzoekscomponent maak ik in een tweede luik de overgang naar het hertalen van sommige stukjes uit het eerste luik naar het niveau van leerlingen uit sterke richtingen wiskunde op het einde van hun middelbaar. Over het toevoegen van deze didactische component bestond voor mezelf geen twijfel. Vijf jaar geleden begon ik immers aan de opleiding wiskunde met het duidelijke doel voor ogen om er nadien het onderwijs mee in te gaan en deze overtuiging is de voorbije jaren enkel nog sterker geworden. Bovendien ben ik er van overtuigd dat het secundair onderwijs de basis vormt voor een innoverende *toekomst*.
Dit didactisch deel is gebruiksvriendelijk opgesteld om in de nabije *toekomst*, zowel voor mezelf als voor ander gemotiveerde leerkrachten, als werkinstrument te dienen. De opgestelde cursus voor de leerlingen is toegevoegd aan de Appendix. Ook de cursus voor de leerkracht, voorzien van vele didactische en inhoudelijke aanvullingen, inclusief de oplossingen van de oefeningen, is daar terug te vinden. Deze cursussen vormen als lessenpakket het uitgangspunt van de inhoud (tweede hoofdstuk) en de uitvoering en evaluatie (derde hoofdstuk) van de vierdelige lessenreeks die ik tweemaal bracht op het Don Boscocollege te Zwijnaarde (context, eerste hoofdstuk).

Deel I

Onderzoekscomponent

1 Voorkennis over bijzondere matrices

1.1 Definities en voorbeelden

We introduceren enkele types matrices die verderop nog aan bod zullen komen, de ene al frequenter dan de andere. Alle matrices in deze uiteenzetting worden steeds (onderverzwegen) beschouwd over een willekeurig commutatief veld, tenzij uitdrukkelijk anders vermeld.

Definitie 1.1.1. (i) Een **niet-negatieve matrix** is een matrix (a_{ij}) waarin voor alle i, j geldt dat $a_{ij} \geq 0$.
Een **positieve matrix** is een matrix (a_{ij}) waarin voor alle i, j geldt dat $a_{ij} > 0$.

(ii) Een **totaal niet-negatieve matrix** is een matrix waarvoor de determinant van elke vierkante deelmatrix niet-negatief is.
Een **totaal positieve matrix** is een matrix waarvoor de determinant van elke vierkante deelmatrix positief is.

(iii) Een **compleet positieve (CP) matrix** is een $n \times n$-matrix A waarvoor een zekere $n \times m-$matrix B bestaat, met m een bepaald natuurlijk getal, zodat $A = BB^T$.
De kleinste m die hieraan voldoet, wordt de **CP-rang** van A genoemd.

(iv) Een **binaire matrix** of **(0,1)-matrix** is een matrix waarin elk element gelijk is aan 0 of aan 1.

(v) Een niet-negatieve vierkante matrix A is een **primitieve matrix** als er een natuurlijk getal k verschillend van nul bestaat zodat A^k positief is.
De kleinste k die hieraan voldoet, wordt de **exponent** van A genoemd.

(vi) Een vierkante matrix A wordt een **decomposeerbare** of **reducibele matrix** genoemd als er een permutatiematrix P bestaat zodanig dat $P^T AP$ blok-bovendriehoeks is, dus als er niet-ledige vierkante deelmatrices A_{11} en A_{22} van A bestaan zodat

$$P^T AP = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right).$$

Een vierkante matrix die niet reducibel is, wordt een **niet-decomposeerbare** of **irreducibele matrix** genoemd.
Een niet-negatieve $n \times n$-matrix A die een $s \times (n - s)$-nul deelmatrix bevat voor een zeker natuurlijk getal s wordt een **gedeeltelijk decomposeerbare matrix** genoemd.
Als er zo geen deelmatrix van A bestaat, noemen we A **volledig niet-decomposeerbaar**.
Een 1×1-matrix is per conventie volledig niet-decomposeerbaar als hij niet-nul is.
We zeggen dat de niet-negatieve matrix A **bijna decomposeerbaar** is als A bij vervanging van eender welk niet-nul element door nul gedeeltelijk decomposeerbaar wordt.

(vii) Een **stochastische matrix**, ook wel een waarschijnlijkheidsmatrix, overgangsmatrix of Markov-matrix[1] genoemd, is een matrix (a_{ij}) waar voor alle i, j geldt dat $0 \leq a_{ij} \leq 1$.
Een **rijstochastische matrix** is een matrix (a_{ij}) waar voor alle i, j geldt dat $0 \leq a_{ij}$ en $\sum_j a_{ij} = 1$, dus waarvoor elke rijsom gelijk is aan 1.

[1] Verwijst naar het gebruik om overgangen in een zogenaamde Markov-ketting uit de probabiliteitstheorie te beschrijven, vernoemd naar de Russische wiskundige Andrey Markov.

Analoog definieert men een **kolomstochastische matrix** als een matrix (a_{ij}) waar voor alle i, j geldt dat $0 \leq a_{ij}$ en $\sum_i a_{ij} = 1$, dus met de kolomsommen gelijk aan aan 1.
Een **dubbelstochastische matrix** is dan een matrix (a_{ij}) waar voor alle i, j geldt dat $0 \leq a_{ij}$ en $\sum_i a_{ij} = \sum_j a_{ij} = 1$.
Stochastische, rechts- en kolomstochastische en dubbelstochastische matrices vormen duidelijkerwijze een deelverzameling van de verzameling van niet-negatieve matrices.

(viii) Een vierkante matrix A is **positief-definiet** als $x^T Ax > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.
Een vierkante matrix A is **positief semi-definiet** als $x^T Ax \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(ix) Een **hermitische matrix** is een complexe vierkante matrix A waarvoor geldt dat $A^T = \overline{A}$, met $\overline{A}$ de complex toegevoegde matrix van A.
Een complexe vierkante matrix A is **normaal** als $A\overline{A^T} = \overline{A^T}A$.

(x) Een **unitaire matrix** is een complexe vierkante matrix A waarvoor geldt dat $A^T\overline{A} = \overline{A}A^T = I$.

(xi) Zij $A = (a_{ij})$ een vierkant matrix van orde n en zij $\sigma \in S_n$. De rij $(a_{1,\sigma(1)}, \ldots, a_{n,\sigma(n)})$ wordt een **diagonaal** van A genoemd en het product $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ noemen we een **diagonaalproduct** van A.
We zeggen dat een vierkante matrix A van orde n een **positieve diagonaal** heeft als er een permutatie $\sigma \in S_n$ bestaat zodat elk element van $(a_{1,\sigma(1)}, \ldots, a_{n,\sigma(n)})$ positief is.

(xii) Een **Toeplitz-matrix** is een $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ waarvoor geldt dat $a_{i,j} = a_{i+1,j+1}$, voor alle $i, j = 1, \ldots, n-1$.
Een **circulante matrix** $A = (a_{ij})$ is een bijzonder geval van een Toeplitz-matrix waarbij elke rij van A een rechtse cyclische verschuiving is ten opzichte van de rij erboven.

Notatie 1.1.2. (i) De matrix verkregen door in de matrix A de i-de rij en de j-de kolom te verwijderen, noteren we als $A(i|j)$.

(ii) Met $A_{(j)} = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})^T$ noteren we de j-de kolom van $A = (a_{ij})$. Soms zullen we de matrix A dan schrijven als $A = (A_{(1)}, \ldots, A_{(n)})$.

(iii) De verzameling van alle vierkante matrices van orde n waarvoor alle kolom- en rijsommen gelijk zijn aan 1, schrijven we als $\mathcal{M}_n$.

(iv) Met Ω_n noteren we de verzameling van dubbelstochastische matrices van orde n. Haar deelverzameling waarvoor alle elementen positief zijn, noteren we met Ω_n^*.

(v) De matrix waarin alle elementen gelijk zijn aan 1, noteren we met J. Verder schrijven we $J_n := n^{-1}J$.

(vi) Met $\mathrm{rk}(A)$ geven we de rang van de matrix A weer.

(vii) Met $\rho(A)$ noteren we de spectraalradius van de vierkante matrix A; dit is grootste modulus van de eigenwaarden van A.

(viii) Voor vierkante matrices A en B noteren we de directe som van A en B als $A\dot{+}B$.

We illustreren bovenstaande lijst van definities met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1.1.3. (i) Het is direct duidelijk dat $I_n \in \Omega_n$, $\{n \times n -$ permutatiematrices$\} \subset \Omega_n \subset \mathcal{M}_n$ en $J_n \in \Omega_n^*$.

(ii) De drie positief-definiete binaire matrices van orde 2 zijn I_2, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ en $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(iii) Zij $A = (a_{ij})$ een Vandermonde matrix; dit is een $n \times n$-matrix waarvoor geldt dat $a_{ij} = r_i^{j-1}$ met reële getallen r_i voor alle indices $i, j = 1, \ldots, n$. Als $r_i > 0$ voor alle $i = 1, \ldots, n$ en $r_{i+1} \geq r_i$ voor alle $i = 1, \ldots, n-1$, dan is A een totaal niet-negatieve matrix.

(iv) De matrix $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ is hermitisch (want reëel en symmetrisch), normaal (want hermitisch), bijna decomposeerbaar (direct per definitie), primitief (triviaal). Dat deze matrix ook compleet positief is met CP-rang 2, volgt uit $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(v) Zij P de permutatiematrix met enen op posities $(1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n), (n,1)$. De matrix $\sum_{i=0}^{n-1} c_i P^i$, waarbij elke c_i de waarde 0 of 1 aanneemt, is een binaire circulante matrix en wordt in Definitie 2.4.18 als $(0,1)$-circulant gedefinieerd.

(vi) Volledig niet-decomposeerbare matrices zijn in het bijzonder irreducibel.

1.2 Over volledig niet-decomposeerbare matrices

We formuleren en bewijzen enkele basisuitspraken over volledig niet-decomposeerbare matrices (gedeeltelijk geïnspireerd op [22]). Het doel is om enerzijds om vertrouwd te geraken met de definities over de decomposeerbaarheid van matrices en anderzijds bij expliciet gebruik van enkele van deze stellingen verderop te kunnen terugverwijzen naar een rigoreus bewijs.

Lemma 1.2.1. *Zij A en B twee volledig niet-decomposeerbare matrices van orde n. Veronderstel dat de grootste nul-deelmatrices in A en B respectievelijk dimensies $s_A \times t_A$ en $s_B \times t_B$ hebben. Als $s_A + t_A = n - k_A$ en $s_B + t_B = n - k_B$, dan geldt:*

$$p + q \leq n - k_A - k_B,$$

waarbij $p \times q$ de dimensie van de grootste nul-deelmatrix van AB voorstelt.

Bewijs. Zij P en Q permutatiematrices van orde n waarvoor geldt:

$$PABQ = \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline W & X \end{array}\right),$$

waarbij de $p \times q$-nul-deelmatrix de grootste nul-deelmatrix is van AB.
Zij R een permutatiematrix van orde n waarvoor geldt:

$$PAR = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right),$$

met A_{11} een $p \times s$-matrix zonder nulkolommen.
Partitioneer $R^T BQ$ nu ook in de volgende deelmatrices:

$$R^T BQ = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right),$$

met B_{11} een $s \times (n-q)$-matrix. We hebben nu dat

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline W & X \end{array}\right).$$

Bijgevolg moet $A_{11}B_{12} = 0$. Omdat A_{11} veronderstel werd geen nulkolommen te hebben, moet dus $B_{12} = 0$. Dan volgt dat $s + q \leq s_B + t_B = n - k_B$. Verder ook gebruik makend van $p + (n - s) \leq s_A + t_A = n - k_A$, besluiten we dat

$$p + q \leq (s - k_A) + (n - k_B - s) = n - k_A - k_B,$$

waarmee het gestelde bewezen is. □

Stelling 1.2.2. *Zij A en B twee volledig niet-decomposeerbare matrices van orde n. Dan is het matrixproduct AB ook volledig niet-decomposeerbaar.*

Bewijs. Als AB een $p \times q$-deelmatrix zou bevatten voor twee volledig niet-decomposeerbare matrices A, B van orde n, dan volgt uit het voorgaande lemma dat $p + q \leq n - 1 - 1 = n - 2$. Per definitie volgt dat AB nooit gedeeltelijk decomposeerbaar kan zijn, dus AB is volledig niet-decomposeerbaar. □

Gevolg 1.2.3. *Zij A een volledig niet-decomposeerbare matrix. Dan zijn ook AA^T en A^TA volledig niet-decomposeerbaar.*

Bewijs. Deze bewering volgt uit het feit dat transponeren de decomposeerbaarheid van een matrix invariant laat en we bijgevolg Stelling 1.2.2 kunnen toepassen. □

Opmerking 1.2.4. De omgekeerde implicatie van Gevolg 1.2.3 is niet geldig. Een tegenvoorbeeld wordt gegeven door de volledig niet-decomposeerbare matrices

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad AA^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

hoewel het duidelijk is dat $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gedeeltelijk decomposeerbaar is.

In [31, Theorem 3] bewijst de Fransman Mathieu Lewin dat voor elke volledig niet-decomposeerbare matrix A van orde n geldt dat $A^{n-1} > 0$. Omdat het triviaal is dat elke niet-decomposeerbare 1×1-matrix primitief is, geldt in het bijzonder dus de volgende stelling.

Stelling 1.2.5. *Een volledig niet-decomposeerbare matrix is primitief.*

Opmerking 1.2.6. Ook van Stelling 1.2.5 geldt de omgekeerde implicatie niet. Beschouw bijvoorbeeld de matrices $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ en $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$: die zijn duidelijk primitief (beiden met exponent 2), maar gedeeltelijk decomposeerbaar.

Daarnaast zal het voor latere bevindingen ook nuttig blijken om de voorkennis met betrekking tot eigenwaarden van (bijzondere) matrices aan te scherpen.

Stelling 1.2.7. *De moduli van de eigenwaarden van een rijstochastische (respectievelijk kolomstochastische) matrix zijn niet groter dan 1. Bovendien is 1 een eigenwaarde van elke rijstochastische (respectievelijk kolomstochastische) matrix.*

Bewijs. Zij λ een eigenwaarde van een rijstochastische matrix $A = (a_{ij})$ met $\mathbf{v}$ als corresponderende eigenvector, dus $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Vergelijken we de i-de rij van het linker- en rechterlid, verkrijgen we voor alle $i = 1, \ldots, n$ dat

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \ldots + a_{in}v_n = \lambda v_i. \tag{1.2.1}$$

Zij $|v_k| := \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\}$. Uit (1.2.1) volgt nu voor $i = k$, gebruik makend van de driehoeksongelijkheid, de definitie van $|v_k|$ en de aanname dat A rijstochastisch is:

$$\begin{aligned}
|\lambda| \cdot |v_k| &= |a_{k1}v_1 + a_{k2}v_2 + \ldots + a_{kn}v_n| \\
&\leq a_{k1}|v_1| + a_{k2}|v_2| + \ldots + a_{kn}|v_n| \\
&\leq a_{k1}|v_k| + a_{k2}|v_k| + \ldots + a_{kn}|v_k| \\
&= (a_{k1} + a_{k2} + \ldots + a_{kn})|v_k| = |v_k|.
\end{aligned}$$

Merk op dat $|v_k| > 0$ omdat een eigenvector per definitie verschillend is van de nulvector. Er moet dus gelden dat $|\lambda| \leq 1$.
Verder kunnen we voor de rijstochastische matrix A expliciet berekenen dat

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \ldots + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} + \ldots + a_{nn} \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

hetgeen direct aantoont dat 1 een eigenwaarde is voor A met bijhorende eigenvector $(1 \cdots 1)^T$. □

Opmerking 1.2.8. Ook een matrix $A \in \mathcal{M}_n$ zal steeds een eigenwaarde 1 bezitten met bijhorende eigenvector $(1 \cdots 1)^T$. Het bewijs van deze uitspraak in Stelling 1.2.7 vereist immers niet dat alle elementen in A niet-negatief zijn.

We formuleren nu een aansluitende grote stelling uit de theorie van eigenwaarden en eigenvectoren voor niet-negatieve matrices. Voor de opbouw en een bewijs ervan verwijzen we de geïnteresseerde lezer bijvoorbeeld naar [24, Chapter 1].

Stelling 1.2.9 (Perron-Frobenius)**.** *Zij A een niet-negatieve en irreducibele vierkante matrix van orde n. Dan gelden volgende uitspraken:*

(i) $\rho(A) > 0$;

(ii) $\rho(A)$ *is een eigenwaarde van* A;

(iii) *er bestaat een positieve vector* $\mathbf{x}$ *zodanig dat* $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$;

(iv) $\rho(A)$ *heeft algebraïsche multipliciteit 1 (en dus ook meetkundige multipliciteit 1).*

Gevolg 1.2.10. *Zij $A \in \Omega_n$ een volledig niet-decomposeerbare matrix. Dan is* 1 *een enkelvoudige eigenwaarde van A.*

Bewijs. Uit Stelling 1.2.7 volgt dat $\rho(A) = 1$ voor een dubbelstochastische matrix A. Aangezien een volledig niet-decomposeerbare matrix in het bijzonder irreducibel is, kunnen we nu de stelling van Perron-Frobenius toepassen om het gewenste resultaat te vinden. □

2 Permanent van een matrix

2.1 Historische achtergrond

De basis voor het concept *permanent* werd door de wiskundig befaamde Fransman Cauchy in 1812 gelegd in het werk [6]. Daarin ontwikkelde hij de theorie van determinanten als een bijzonder geval van alternerende symmetrische functies, waar Cauchy met de terminologie *fonctions symétriques permanents* naar verwees. Hij wou hiermee de definitie van symmetrische functies uitbreiden naar functies waarbij er een tekenwissel kon optreden wanneer de variabelen gepermuteerd werden. Ook de Franse wiskundige Binet publiceerde ongeveer gelijktijdig met Cauchy een werk waarin permanenten geïntroduceerd werden (zie [2]). De eerste wiskundige die deze functie letterlijk *permanent* noemde zoals we die in de volgende sectie ook zullen definiëren, was de Schot Thomas Muir in zijn artikel [40] in 1882.

Tussen 1812 en 1900 werden er een twintigtal artikels gepubliceerd over permanenten, onder meer van Cayley, Borchardt en Muir. In de meerderheid ervan verscheen de permanent in formules met betrekking tot determinanten; de link tussen beide concepten alsook enkele interessante ongelijkheden waarin zowel permanenten als determinanten betrokken worden, brengen we verderop in veel meer detail aan het licht.

In de eerste helft van de twintigste eeuw werden door verschillende wiskundigen enkele identiteiten en ongelijkheden met permanenten geformuleerd als vermoedens; benoemenswaardige bewijzen bleven uit. Desondanks is er de voorbije decennia een hernieuwde interesse in de permanentfunctie ontstaan, hoofdzakelijk te danken aan de paper [36] van Marvin Marcus en Morris Newman die in 1959 verscheen. Daarin worden namelijk enkele belangrijke deelresultaten beschreven en aangetoond die de richting uitgaan van het staven van het befaamde vermoeden van de Nederlandse wiskundige Bartel Leendert van der Waerden (zie Vermoeden 3.1.1), daterend uit 1926. We wijden er later in deze uiteenzetting een hele sectie aan.

Henryk Minc publiceerde in 1978 in het laatste hoofdstuk van [39] een oplijsting van twintig andere onopgeloste vermoedens en tien open problemen, afkomsig van verschillende wiskundigen. Alle andere hoofdstukken in dit uitgebreide naslagwerk bevatten een bondige doch heldere bespreking van de tot dan toe voornaamste theorie omtrent permanenten, waarop we ons in verdere besprekingen, formuleringen en bewijzen in eerste instantie meermaals zullen baseren. Door de opgekomen hernieuwde interesse in permanenten zal het echter ook vaak interessant zijn om recentere boeken en artikels nader te bestuderen, omwille van diverse invalshoeken en verdere ontwikkelingen. Desalniettemin kunnen we niet om het werk van Minc heen, omdat hij ook in latere publicaties enerzijds nieuwe vermoedens of open problemen formuleerde en anderzijds sommige vorige vermoedens kon ontkrachten, bevestigen of er verdere ontwikkelingen over kon meegeven. Dat zijn werken als het ware de bakermat vormen voor ontwikkelingen door andere wiskundigen, toont bijvoorbeeld het lijvige artikel [7] van de Koreaan Cheon en de Australiër Wanless uit 2005 aan.

2.2 Definitie en eigenschappen

Definitie 2.2.1. De **permanent** van een $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ wordt gedefinieerd als

$$\operatorname{per} A := \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

waarbij σ over alle permuaties van $\{1, 2, \ldots, n\}$ loopt, dus $\sigma \in S_n$.

Voorbeeld 2.2.2. $\operatorname{per} \left(\begin{smallmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 8 = -13$.

Opmerking 2.2.3. De definitie van de permanent kan worden veralgemeend tot niet-vierkante matrices. Voor een $m \times n$-matrix $A = (a_{ij})$, met $m \leq n$, wordt de permanent van A dan gedefinieerd als

$$\operatorname{per} A := \sum_{\sigma} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{m,\sigma(m)},$$

waarbij de sommatie loopt over alle bijecties σ van $\{1, 2, \ldots, m\}$ naar $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Voor een $m \times n$-matrix A met $m > n$, definiëren we $\operatorname{per} A := \operatorname{per} A^T$. Om aan te duiden dat A niet noodzakelijk vierkant hoeft te zijn, wordt soms $\operatorname{Per} A$ in plaats van $\operatorname{per} A$ genoteerd.
In deze uiteenzetting zullen we ons echter hoofdzakelijk beperken tot de definitie van een permanent toegepast op vierkante matrices.

Voorbeeld 2.2.4. $\operatorname{per} \left(\begin{smallmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right) = 3 \cdot 1 + 8 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 8 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 31$.

Permanenten en determinanten hebben enkele analoge eigenschappen, zoals het feit dat zowel de determinant als de permanent van een matrix multilineaire functies van de kolommen zijn. We lijsten deze en nog enkele andere interessante eigenschappen van permanenten op alvorens we concrete berekeningswijzen voor permanenten onder de loep nemen.

Eigenschap 2.2.5. (i) *De permanent van een vierkante matrix is invariant onder transpositie. Bijgevolg zijn alle eigenschappen van permanenten met betrekking tot de rijen van een matrix ook geldig voor de kolommen.*

(ii) *De permanent is een multilineaire functie van de rijen en kolommen.*

(iii) *Voor een willekeurige permutatiematrix P geldt dat $\operatorname{per} P = 1$.*
In het bijzonder is de permanentfunctie genormeerd, met andere woorden: $\operatorname{per} I_n = 1$.

(iv) *Zij A een vierkante matrix die een nulrij (of nulkolom) bevat. Dan geldt:* $\operatorname{per} A = 0$.

(v) *Zij A een vierkante matrix en P_1, P_2 permutatiematrices van dezelfde orde. Dan geldt:* $\operatorname{per} P_1 A P_2 = \operatorname{per} A$.

(vi) *Voor een vierkante matrix A en diagonaalmatrices D, E van dezelfde orde geldt:* $\operatorname{per} DAE = \operatorname{per} D \operatorname{per} A \operatorname{per} E$.

(vii) *Voor een vierkante matrix A geldt dat* $|\operatorname{per} A| \leq \operatorname{per} |A|$.

Bewijs. (i) Per definitie van de permanent volgt onmiddellijk dat

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \operatorname{per} A^T.$$

De permanent is dus een symmetrische functie van de kolommen/rijen van een matrix.

(ii) Zij $A = (a_{ij})$ een vierkante matrix van orde n. Noteer met $\tilde{A}$ de matrix verkregen door de eerste kolom van A te vervangen door de som van de eerste kolom van A en r keer de tweede kolom van A, voor een willekeurige $r \in \mathbb{R}$. Met de expansiestelling van Laplace (zie Stelling 3.1.4 verderop) vinden we dan gemakkelijk dat

$$\begin{aligned}\operatorname{per} \tilde{A} &= \sum_{j=1}^{n} (a_{j1} + r \cdot a_{j2}) \ \operatorname{per} A(j|1) = \sum_{j=1}^{n} a_{j1} \ \operatorname{per} A(j|1) + r \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{j2} \ \operatorname{per} A(j|1) \\ &= \operatorname{per} A + r \cdot \operatorname{per} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

waaruit na veralgemening van de multilineariteit voor een willekeurige rij of kolom het gestelde volgt.

(iii) Volgt onmiddellijk uit de definitie van een permutatiematrix en de permanentfunctie.

(iv) Per definitie bestaat de permanent uit de som van alle diagonaalproducten. Wanneer de gegeven matrix een nulrij of nulkolom bezit, bevat elke term een nulfactor en is de som van al deze termen bijgevolg ook gelijk aan nul.

(v) Omdat vermenigvuldiging van een willekeurige vierkante matrix met een permutatiematrix de rijen of kolommen van die matrix permuteert en de permanent per definitie sommeert over alle permutaties, volgt de gestelde invariantie direct.

(vi) Een $n \times n$-matrix A links vermenigvuldigen met een diagonaalmatrix $D = (d_{ii})$ komt neer op het vermenigvuldigen van de i-de rij van A met d_{ii}, voor alle i van 1 tot n. Analoog resulteert rechtse vermenigvulding met een diagonaalmatrix E in het vermenigvuldigen van de kolommen van A met de respectieve diagonaalelementen van E. Toepassing van de tweede eigenschap staaft de eigenschap, omdat de permanent van een diagonaalmatrix gelijk is aan het product van de diagonaalelementen.

(vii) Volgt direct uit de driehoeksongelijkheid, die stelt dat voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt: $|a + b| \leq |a| + |b|$. $\square$

Opmerking 2.2.6. (i) In tegenstelling tot de eigenschap dat de determinant van het product van matrices gelijk is aan het product van de respectieve determinanten, is een analoge eigenschap niet geldig voor de permanent van het product van matrices. Een concreet tegenvoorbeeld wordt gegeven met behulp van 2×2-matrices J (zie Notatie 1.1.2):

$$8 = \operatorname{per} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \operatorname{per}(J \cdot J) \neq \operatorname{per} J \ \operatorname{per} J = 4.$$

Stelling 2.2.15 zal ons echter wel in staat stellen om op een efficiënte manier de permanent van het product van twee matrices te berekenen.

(ii) In tegenstelling tot de determinant geeft de permanent geen informatie over het al of niet inverteerbaar zijn van een vierkante matrix. Zo vinden we bijvoorbeeld dat per $J_n = \frac{n!}{n^n}$ voor de singuliere matrix J_n, terwijl de matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ inverteerbaar is en per $A = 0$.

Om het aantal indices zo laag mogelijk te houden, voeren we enkele notaties in die we verderop zeer frequent zullen hanteren.

Notatie 2.2.7. Zij $\Gamma_{r,n}$ de verzameling van alle n^r rijen $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ van natuurlijke getallen, waarbij $1 \leq \omega_i \leq n$, met $i = 1, \ldots, r$. Dan noteren we met $G_{r,n}$ de deelverzameling van $\Gamma_{r,n}$ die bestaat uit alle $\binom{n+r-1}{r}$ niet-dalende rijen, dus

$$G_{r,n} := \{(\omega_1, \ldots, \omega_r) | 1 \leq \omega_1 \leq \ldots \leq \omega_r \leq n\}$$

en $Q_{r,n}$ stelt de deelverzameling voor van de $\binom{n}{r}$ stijgende rijen, met andere woorden:

$$Q_{r,n} := \{(\omega_1, \ldots, \omega_r) | 1 \leq \omega_1 < \ldots < \omega_r \leq n\}.$$

Voor $\omega \in G_{r,n}$ noteren we met $\mu(\omega)$ het product van de faculteiten van het aantal keren dat de verschillende natuurlijke getallen in ω voorkomen.

Voorbeeld 2.2.8. $\mu(1, 3, 3, 4, 6, 6, 6, 9) = 1!\ 2!\ 1!\ 3!\ 1! = 12$.

Definitie 2.2.9. (i) Indien $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix is en $\omega, \tau \in \Gamma_{r,n}$, dan noteren we met $A[\omega|\tau]$ de $r \times r$-matrix waarvan het element op positie (s, t) gelijk is aan $a_{\omega_s \tau_t}$.
Per conventie geldt dat $\operatorname{per} A[\omega|\tau] = 1$ als $r = 0$.

(ii) Indien $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix is en $\omega, \tau \in Q_{r,n}$, dan stelt $A(\omega|\tau)$ de $(n - r) \times (n - r)$-deelmatrix van A voor complementair aan $A[\omega|\tau]$. Met andere woorden: $A(\omega|\tau)$ is de matrix waarin rijen ω en kolommen τ geschrapt zijn ten opzichte van A.
Per conventie geldt dat $\operatorname{per} B(\omega|\tau) = \operatorname{per} B$ als $r = 0$, en $\operatorname{per} B(\omega|\tau) = 1$ als $r = n$.

Een analoge methode zoals de berekening van de determinant van een matrix door middel van ontwikkeling naar een rij of kolom (ook gekend onder de regel van Laplace), kan ook worden gebruikt voor de berekening van de permanent van een vierkante matrix − dit is precies het bijzonder geval dat in Stelling 3.1.4 wordt geformuleerd. Deze stelling bevat bovendien ook een veralgemening, waarin de ontwikkeling over meerdere kolommen en rijen loopt. Eveneens voor determinanten bestaat een dergelijke uitgebreide Laplace expansie, alhoewel die minder bekend is. Voor het bewijs baseren we ons op [37, pp. 21-22].

Stelling 2.2.10 (Expansie van Laplace)**.** *Zij $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix en $\alpha \in Q_{r,n}$, voor een willekeurige natuurlijke $r \in [0, n]$. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A = \sum_{\omega \in Q_{r,n}} \operatorname{per} A[\omega|\alpha]\ \operatorname{per} A(\omega|\alpha).$$

In het bijzonder geldt, respectievelijk voor alle j $(1 \leq j \leq n)$ en alle i $(1 \leq i \leq n)$:

$$\operatorname{per} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per} A(i|j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per} A(i|j).$$

Bewijs. Zij r een natuurlijk getal, $1 \leq r \leq n$, en zij $\alpha = (1, \ldots, r)$. Beschouw de permanent $\operatorname{per} A[\alpha|\alpha]$, waarbij $A[\alpha|\alpha]$ zich in de linkerbovenhoek van A bevindt. Alle termen van deze permanent zijn van de vorm $a_{1,i_1} \cdots a_{r,i_r}$, met $i_1, \ldots, i_r$ een permutatie van $1, \ldots, r$. Beschouw $\operatorname{per} A(\alpha|\alpha)$ en merk op dat $A(\alpha|\alpha)$ gesitueerd is in de rechteronderhoek van A. De termen in deze permanent zijn van de vorm $a_{r+1,i_{r+1}} \cdots a_{n,i_n}$, waarbij $i_{r+1}, \ldots, i_n$ een permutatie voorstelt van $r + 1, \ldots, n$. Beschouw nu het product $\operatorname{per} A[\alpha|\alpha] \cdot \operatorname{per} A(\alpha|\alpha)$. Omdat alle $r!$ termen van de eerste factor verschillend zijn van de $(n - r)!$ termen van de tweede factor, bevat dit product

$r!(n-r)!$ verschillende termen.
Zij nu $\omega \in Q_{r,n}$ zodat $\omega \neq \alpha$. Door rechtse vermenigvuldiging met de geschikte permutatiematrix (permutatiematrices laten de permanentfunctie immers invariant) kunnen we de kolommen geassocieerd met ω laten samenvallen met de eerste r kolommen van A. We verkrijgen dat $A[\alpha|\omega]$ zich in de linkerbovenhoek van A bevindt. Analoog kunnen we $A(\alpha|\omega)$ in de rechteronderhoek situeren. Het product $\operatorname{per} A[\alpha|\omega] \cdot \operatorname{per} A(\alpha|\omega)$ levert opnieuw $r!(n-r)!$ verschillende termen op die aan $\operatorname{per} A$ worden toegevoegd. Deze termen zijn bovendien verschillend van de termen die we verkregen bij $\operatorname{per} A[\alpha|\alpha] \cdot \operatorname{per} A(\alpha|\alpha)$, omdat we andere kolommen van A beschouwden. Aangezien er $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ manieren zijn om $r!(n-r)!$ verschillende producten te vormen die bijdragen tot $\operatorname{per} A$, worden alle $n!$ termen van $\operatorname{per} A$ in rekening gebracht. De explansie van Laplace is hiermee bewezen voor $\alpha = (1, \ldots, r)$.
Zij nu $\alpha = (k_1, \ldots, k_r)$ met $\alpha \in Q_{r,n}$. Na linkse vermenigvuldiging met de geschikte permutatiematrix stellen de rijen geassocieerd met α opnieuw de eerste r rijen van A voor. Geheel analoog vinden we dus dat

$$\operatorname{per} A = \sum_{\omega \in Q_{r,n}} \operatorname{per} A[\alpha|\omega] \ \operatorname{per} A(\alpha|\omega).$$

In het geval dat $r = n$, is de stelling triviaal waar.
Merk op dat wanneer we $r = 1$ stellen, we juist de 'klassieke' ontwikkeling naar een willekeurige rij of kolom van A bekomen:

$$\operatorname{per} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per} A(i|j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per} A(i|j). \qquad \square$$

Voorbeeld 2.2.11. Beschouw de volgende matrix van orde 4:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

We berekenen $\operatorname{per} A$ met behulp van de expansiestelling van Laplace. Zij $r = 2$ en $\alpha = (1, 2)$. Dan vinden we: $Q_{2,4} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$ en

$$\begin{aligned}
\operatorname{per} A &= \operatorname{per} A[1,2|1,2] \ \operatorname{per} A(1,2|1,2) + \operatorname{per} A[1,3|1,2] \ \operatorname{per} A(1,3|1,2) \\
&\quad + \operatorname{per} A[1,4|1,2] \ \operatorname{per} A(1,4|1,2) + \operatorname{per} A[2,3|1,2] \ \operatorname{per} A(2,3|1,2) \\
&\quad + \operatorname{per} A[2,4|1,2] \ \operatorname{per} A(2,4|1,2) + \operatorname{per} A[3,4|1,2] \ \operatorname{per} A(3,4|1,2) \\
&= 1 \cdot 8 + 8 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 4 \cdot 8 + 0 \cdot 12 + 4 \cdot (-1) \\
&= 47.
\end{aligned}$$

Bij het berekenen van determinanten in de praktijk wordt vaak gebruik gemaakt van elementaire rij-operaties om het rekenproces te versnellen. De methode van de ontwikkeling naar een rij of kolom wordt voor $n \times n$-matrices van grote orde immers zeer lastig; we hebben namelijk te maken met $n!$ rekenkundige operaties.
Dergelijke rij-operaties kunnen we niet aanwenden om de berekeningen van permanenten te versnellen: een van de nuttigste eigenschappen van determinanten, namelijk dat ze invariant

zijn onder optelling van veelvouden van een rij (of kolom) bij een andere rij (of kolom), geldt immers niet voor permanenten.
Er zijn, net zoals voor determinanten, wel formules ontwikkeld om de permanent van een som en een product van matrices te berekenen, gebaseerd op expansie. De volgende identiteit werd vermoedelijk voor het eerst neergeschreven door E. R. Caianiello in 1959. Het elegante bewijs dat we zullen geven werd gesuggereerd door Marvin Marcus (zie [39, Theorem 1.4]).

Stelling 2.2.12. *Zij* $A = (a_{ij})$ *en* $B = (b_{ij})$ *twee* $n \times n$*-matrices. Dan geldt:*

$$\operatorname{per}(A+B) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\alpha,\beta \in Q_{r,n}} \operatorname{per} A[\alpha|\beta] \; \operatorname{per} B(\alpha|\beta),$$

waarbij $\operatorname{per} A[\alpha|\beta] = 1$ *en* $\operatorname{per} B(\alpha|\beta) = \operatorname{per} B$ *als* $r = 0$*, en* $\operatorname{per} B(\alpha|\beta) = 1$ *als* $r = n$*.*

Bewijs. We vertrekken vanuit de volgende identiteit:

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\alpha \in Q_{r,n}} \left(\prod_{i=1}^{r} x_{\alpha_i}\right) \left(\prod_{i=r+1}^{n} y_{\alpha'_i}\right),$$

waarbij $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in Q_{r,n}$ en $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r) \in Q_{n-r,n}$ de complementaire rij voorstelt ten opzichte van α in $(1, \ldots, n)$. Dan kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned}
\operatorname{per}(A+B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} (a_{i,\sigma(i)} + b_{i,\sigma(i)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{r=0}^{n} \sum_{\alpha \in Q_{r,n}} \prod_{i=1}^{r} a_{\alpha_i,\sigma(\alpha_i)} \prod_{i=r+1}^{n} b_{\alpha'_i,\sigma(\alpha'_i)} \\
&= \sum_{r=0}^{n} \sum_{\alpha \in Q_{r,n}} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{r} a_{\alpha_i,\sigma(\alpha_i)} \prod_{i=r+1}^{n} b_{\alpha'_i,\sigma(\alpha'_i)} \right) \\
&= \sum_{r=0}^{n} \sum_{\alpha \in Q_{r,n}} \left(\sum_{\beta \in Q_{r,n}} \operatorname{per} A[\alpha|\beta] \; \operatorname{per} B(\alpha|\beta) \right).
\end{aligned}$$

De uitdrukking tussen haken in de voorlaatste stap stelt juist de permanent voor van de matrix die als i-de rij de (α_i)-de rij van A heeft voor alle $i = 1, \ldots, r$ en de (α'_i)-de rij van B voor alle $j = r+1, \ldots, n$. Toepassing van de expansiestelling van Laplace op de rijen met indices α verklaart de laatste gelijkheid en voltooit dus het bewijs. □

Voorbeeld 2.2.13. Beschouw de volgende 2×2-matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Merk op dat $Q_{1,2} = \{(1), (2)\}$ en $Q_{2,2} = \{(1,2)\}$. Met behulp van Stelling 2.2.12 vinden we dan:

$$\begin{aligned}
\operatorname{per}(A+B) &= \operatorname{per} B + \operatorname{per} A[1|1] \; \operatorname{per} B(1|1) + \operatorname{per} A[1|2] \; \operatorname{per} B(1|2) + \operatorname{per} A[2|1] \; \operatorname{per} B(2|1) \\
&\quad + \operatorname{per} A[2|2] \; \operatorname{per} B(2|2) + \operatorname{per} A[1,2|1,2] \; \operatorname{per} B(1,2|1,2) \\
&= \operatorname{per} B + \operatorname{per} A[1|1] \; \operatorname{per} B(1|1) + \operatorname{per} A[1|2] \; \operatorname{per} B(1|2) + \operatorname{per} A[2|1] \; \operatorname{per} B(2|1) \\
&\quad + \operatorname{per} A[2|2] \; \operatorname{per} B(2|2) + \operatorname{per} A \cdot 1
\end{aligned}$$

$$= -2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1$$
$$= -2.$$

Ter controle vinden we inderdaad dat

$$\operatorname{per}(A+B) = \operatorname{per}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2.$$

Ook de identiteit van Cauchy en Binet voor het product van determinanten (voor het eerst door de Kroaat Svetozar Kurepa geformuleerd in 1964) kent haar analogon voor permanenten. Het bewijs dat door Cauchy en Binet werd gegeven, laten we voorafgaan door een hulpstelling. Beide bewijzen vinden we terug in [39, pp. 17-19].

Lemma 2.2.14. *Zij f een scalaire functie op m-tuples van natuurlijke getallen. Dan geldt:*

$$\sum_{\omega \in \Gamma_{m,n}} f(\omega_1, \ldots, \omega_m) = \sum_{\omega \in G_{m,n}} \frac{1}{\mu(\omega)} \sum_{\sigma \in S_m} f(\omega_{\sigma(1)}, \ldots, \omega_{\sigma(m)}),$$

met $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$.

Bewijs. We verdelen de verzameling van m-tuples $\Gamma_{m,n}$ in partities, met name in equivalentieklassen, waarbij we stellen dat twee m-tuples equivalent zijn als ze precies dezelfde natuurlijke getallen bevatten. Per definitie van $G_{m,n}$ bevat elke klasse dan juist een m-tuple dat tot $G_{m,n}$ behoort. Als we alle natuurlijke getallen $\omega_1, \ldots, \omega_m$ van een m-tuple $\omega := (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ permuteren op alle $m!$ mogelijke manieren, verkrijgen we alle m-tuples in de equivalentieklasse van ω, waarin elk m-tuple precies $\mu(\omega)$ keer voorkomt. Uit deze observatie vinden we het rechterlid van de aan te tonen identiteit als som van alle scalaire functies $f(\omega)$. Dit komt uiteraard overeen met de sommatie van $f(\omega)$ in elke equivalentieklasse van $\Gamma_{m,n}$ apart en het vervolgens optellen van al deze partieelsommen, wat juist staat uitgedrukt in het linkerlid. □

Stelling 2.2.15 (Binet-Cauchy voor permanenten)**.** *Zij $A = (a_{ij})$ en $B = (b_{ij})$ twee $n \times n$-matrices. Dan geldt:*

$$\operatorname{per}(AB) = \sum_{\omega \in G_{n,n}} \frac{1}{\mu(\omega)} \operatorname{per}(A[1, \ldots, n|\omega]) \ \operatorname{per}(B[\omega|1, \ldots, n]).$$

Bewijs. Met een eerder ingevoerde notatie kunnen we voor een willekeurige vierkante matrix $C = (c_{ij})$ van orde n schrijven dat $\operatorname{per} C = \operatorname{per}(C_{(1)}, \ldots, C_{(n)})$ en dat $(AB)_{(i)} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} B_{(t)}$. Uit achtereenvolgens deze observaties, de multilineariteit van de permanentfunctie en de toepassing van voorgaand lemma volgt dat

$$\begin{aligned}
\operatorname{per}(AB) &= \operatorname{per}((AB)_{(1)}, \ldots, (AB)_{(n)}) \\
&= \operatorname{per}\left(\sum_{t=1}^{n} a_{1t} B_{(t)}, \ldots, \sum_{t=1}^{n} a_{nt} B_{(t)}\right) \\
&= \sum_{\omega \in \Gamma_{n,n}} \prod_{i=1}^{n} a_{i\omega_i} \ \operatorname{per}(B_{(\omega_1)}, \ldots, B_{(\omega_n)}) \\
&= \sum_{\omega \in G_{n,n}} \frac{1}{\mu(\omega)} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\omega_{\sigma(i)}} \ \operatorname{per}(B_{(\omega_{\sigma(1)})}, \ldots, B_{(\omega_{\sigma(n)})}).
\end{aligned}$$

Aangezien de permanent van een matrix invariant is onder permutaties van de kolommen van die matrix, geldt bovendien dat

$$\operatorname{per}(B_{(\omega_1)}, \ldots, B_{(\omega_n)}) = \operatorname{per}(B_{(\omega_{\sigma(1)})}, \ldots, B_{(\omega_{\sigma(n)})}) = \operatorname{per} B[\omega|1, \ldots, n].$$

Hiermee kunnen we het bewijs voltooien:

$$\begin{aligned}\operatorname{per}(AB) &= \sum_{\omega \in G_{n,n}} \frac{1}{\mu(\omega)} \operatorname{per} B[\omega|1, \ldots, n] \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\omega_{\sigma(i)}} \\ &= \sum_{\omega \in G_{n,n}} \frac{1}{\mu(\omega)} \operatorname{per} A[1, \ldots, n|\omega] \ \operatorname{per} B[\omega|1, \ldots, n].\end{aligned}$$ □

Voorbeeld 2.2.16. Beschouw de volgende 2×2-matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Merk op dat $G_{2,2} = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}$. Met behulp van de formule van Cauchy en Binet berekenen we dan:

$$\begin{aligned}\operatorname{per}(AB) &= \frac{1}{2} \operatorname{per} A[1,2|1,1] \ \operatorname{per} B[1,1|1,2] + \operatorname{per} A[1,2|1,2] \ \operatorname{per} B[1,2|1,2] \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{per} A[1,2|2,2] \ \operatorname{per} B[2,2|1,2] \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \\ &= 10.\end{aligned}$$

Ter controle vinden we inderdaad dat

$$\operatorname{per}(AB) = \operatorname{per} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 10.$$

2.3 Evaluatie van permanenten

De evaluatie van determinanten kan omwille van de toepassing van Gauss-eliminatie (ook wel gekend als rij-reductie) beperkt worden tot het evalueren van een systeem van lineaire vergelijkingen en kan dus worden uitgevoerd in polynomiale tijd. We weten reeds uit de zonet onderzochte eigenschappen dat we voor de evaluatie van permanenten echter geen gebruik kunnen maken van dergelijke elementaire rij-operaties. De evaluatie van de permanent van een $n \times n$-matrix met behulp van de definitie of met de ontwikkeling van Laplace is een berekening met een veel hogere complexiteit, namelijk van de orde $(n+1)!$. Het is dan ook niet verwonderlijk dat pogingen ondernomen zijn om de complexiteit van het berekenen van permanenten te reduceren. We vernoemen hier twee succesvolle algoritmes.

2.3.1 Formule van Ryser

De Amerikaanse wiskundige Herbert John Ryser, een van de spilfiguren uit de vorige eeuw in de combinatoriek, ontwikkelde in 1963 een methode om de complexiteit van de berekening van een permanent terug te brengen tot een aantal rekenkundige operaties van orde $2^n \cdot n$ (zie bijvoorbeeld [3, Sectie 1.4]) – merkelijk een aanzienlijke verbetering voor matrices van grote orde.

Notatie 2.3.1. (i) Zij A_k de matrix bekomen door uit de $n \times n$-matrix A de k-de kolom te schrappen en noteer algemener met $A_{j_1,\dots,j_m}$ de matrix verkregen door de kolommen $j_1, \dots, j_m$ van A te schrappen, waarbij $1 \leq m \leq n-1$.

(ii) Noteer $\Sigma_k(A)$ voor de verzameling van alle $n \times (n-k)$-matrices die ontstaan door op alle mogelijke manieren k kolommen uit de matrix A te schrappen. Dan vinden we onder meer dat $\Sigma_0(A) = \{A\}, \Sigma_1(A) = \{A_1, \dots, A_n\}$ en $\Sigma_{n-1}(A) = \{Ae_1, \dots, Ae_n\}$, waarbij e_i de kolommatrix voorstelt met 1 op de i-de rij en 0 elders.

(iii) Zij $S_k = \sum_{X \in \Sigma_k(A)} P(X)$, waarbij $P(X)$ het product van de rijsommen van X voorstelt.

Al deze notaties indachtig kunnen we het algoritme van Ryser dan als volgt formuleren:

$$\operatorname{per} A = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k S_k.$$

Voorbeeld 2.3.2. (i) Zij $A = (a_{ij})$ een matrix van orde $n = 2$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{per} A = S_0 - S_1, \text{ met} \\
&\quad S_0 = P(A) = (a_{11} + a_{12})(a_{21} + a_{22}) = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} + a_{12}a_{22} \text{ en} \\
&\quad S_1 = P(A_1) + P(A_2) = a_{12}a_{22} + a_{11}a_{21}.
\end{aligned}$$

We besluiten dat $\operatorname{per} A = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}$.

(ii) Zij $A = (a_{ij})$ een matrix van orde $n = 3$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{per} A = S_0 - S_1 + S_2, \text{ met} \\
&\quad S_0 = P(A) = (a_{11} + a_{12} + a_{13})(a_{21} + a_{22} + a_{23})(a_{31} + a_{32} + a_{33}), \\
&\quad S_1 = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = (a_{12} + a_{13})(a_{22} + a_{23})(a_{32} + a_{33}) \\
&\qquad\quad + (a_{11} + a_{13})(a_{21} + a_{23})(a_{31} + a_{33}) + (a_{11} + a_{12})(a_{21} + a_{22})(a_{31} + a_{32}) \text{ en} \\
&\quad S_2 = P(A_{1,2}) + P(A_{2,3}) + P(A_{1,3}) = a_{13}a_{23}a_{33} + a_{11}a_{21}a_{31} + a_{12}a_{22}a_{32}.
\end{aligned}$$

Uiteindelijk volgt er, na het distributief uitwerken van alle factoren in S_0 en S_1:

$$\operatorname{per} A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}.$$

2.3.2 Formule van Glynn

Vrij recent, in 2010, ontwikkelde de Australische wiskundige David G. Glynn enkele alternatieve formules om de permanent van een $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ te berekenen, zonder in te boeten voor de snelheid van de formule van Ryser (zie [3, Sectie 1.7] en [15, Theorem 2.1]). De eenvoudigste van deze formules luidt:

$$\operatorname{per} A = 2^{1-n} \sum_{v \in \mathbb{B}_n} \left(\prod_{j=1}^{n} v_j \right) \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j,$$

waarin $\mathbb{B}_n = \{v = (v_1, \dots, v_n) \in \{-1, 1\}^n \mid v_1 = 1\}$.

Voorbeeld 2.3.3. Zij $A = (a_{ij})$ een matrix van orde $n = 2$. Dan is $\mathbb{B}_n = \{(1, -1), (1, 1)\}$. Noem $v := (v_1, v_2) = (1, -1)$ en $w := (w_1, w_2) = (1, 1)$. Met behulp van de formule van Glynn vinden we:

$$\begin{aligned} \operatorname{per} A &= 2^{-1}\left(v_1 v_2 \left(\prod_{i=1}^{2} a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2\right) + w_1 w_2 \left(\prod_{i=1}^{2} a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(-1(a_{11} - a_{12})(a_{21} - a_{22}) + 1(a_{11} + a_{12})(a_{21} + a_{22})\big) \\ &= a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

2.4 Interpretaties en toepassingsvelden

Determinanten van matrices kennen ontegensprekelijk diepgaandere toepassingen in de wiskunde − ze zijn namelijk alomtegenwoordig in zowel de zuivere als de toegepaste wiskunde, maar ook in (andere) wetenschappen − dan permanenten van matrices. Toch kent ook de permanent vele gebruiken en toepassingen in diverse (wiskunde)gebieden, mede door haar verschillende interpretaties. We lichten de voornaamste toe.

2.4.1 Immanent van een matrix

Een eerste interpretatie bekomen we door het veralgemeend concept van een permanent en een determinant te beschouwen, namelijk: de immanent van een matrix, ingevoerd door de Britse groepentheoreticus Dudley E. Littlewood en de Britse algebrist Archibald Read Richardson. Om tot de definitie van een immanent te komen (geïnspireerd op onder meer [54, Section 2]), brengen we eerst enkele groepentheoretische concepten in herinnering.

Definitie 2.4.1. Zij G een groep. Een **karakter** van G is een groepshomomorfisme

$$\chi : G \to \mathbb{C}^\times : g \mapsto \chi(g).$$

Een karakter definieert een **representatie** van G op elke eindig-dimensionale vectorruimte V door $g \in G$ te laten werken op V via linkse vermenigvuldiging met $\chi(g) \in \mathbb{C}^\times$.

Definitie 2.4.2. Voor elke eindige permutatiegroep $G \in S_n$ en elk karakter χ wordt de **veralgemeende matrixfunctie** met betrekking tot χ gegeven door

$$d_\chi^G : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C} : (a_{ij}) \mapsto \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

In het geval dat $G = S_n$ is, wordt de functie $d_\chi^G = d_\chi$ de **immanent** genoemd en schrijven we Imm_χ^G of Imm_χ. Merk op dat wanneer $G = S_n$ en χ het alternerende karakter sgn is, we juist de definitie van de determinant verkrijgen. In het geval van het triviale karakter $\chi = 1$ drukt $Imm_\chi(A)$ precies de definitie van de permanent van A uit.

Voorbeeld 2.4.3. De enige immanenten voor 2×2-matrices zijn juist de permanent en de determinant. Voor $n = 3$ bestaan er voor $G = S_n$ echter drie irreducibele representaties met bijhorende karakters $\chi_1 = 1$ (het triviale karakter), $\chi_2 = sgn$ en χ_3. Omdat de inwerking van een karakter χ_i op een toevoegingsklasse van een willekeurige $g \in G$ wegens het abels zijn van

$\mathbb{C}^{\times}$ samenvalt met $\chi_i(g)$ zelf, volstaat het om de werking van het karakter dat we beschouwen na te gaan op $id, (1\ 2))$ en $(1\ 2\ 3)$. Zo besluiten we dat het karakter χ_3 op de elementen van S_3 als volgt werkt: $\chi_3(id) = 2, \chi_3((1\ 2)) = 0$ en $\chi_3((1\ 2\ 3)) = -1$. Bijgevolg wordt $Imm_{\chi_3}^{S_3}(a_{ij})$ voor de vierkante matrix $A = (a_{ij})$ van orde 3 gegeven door $2a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32}$.

Aangezien elke permanent in het bijzonder een immanent is, hebben we als het ware een eerste interpretatie van de permanent van een matrix beschouwd. Paper [16] van de wiskundigen Ian P. Goulden en David M. Jackson uit 1990 bewijst dat er ook onderzoek is geweest naar combinatorische eigenschappen van immanenten, leidend tot een aantal vermoedens, identiteiten en ongelijkheden. Ter illustratie halen we twee ongelijkheden aan, geformuleerd en (her)bewezen door de hedendaagse wiskundige professor John R. Stembridge, alsook twee vermoedens, door dezelfde wiskundige uitvoerig beschreven in onder meer [47, Introduction, Corollary 3.3, Corollary 3.4] en [46, Theorem 1.2, Conjecture 2.2].

Stelling 2.4.4. *Zij A een totaal niet-negatieve matrix van orde n en zij χ een karakter van S_n. Dan geldt:* $\mathrm{Imm}_\chi A \geq 0$.

Stelling 2.4.5 (Schur)**.** *Zij A een hermitische positief semi-definiete matrix van orde n en zij χ een karakter van S_n. Dan geldt:* $\chi(A) \geq \deg(\chi) \det A$.

Vermoeden 2.4.6 (Elliot Lieb's Permanental Dominance Conjecture)**.** *Zij A een hermitische positief semi-definiete matrix van orde n en zij χ een karakter van S_n. Dan geldt:* $\chi(A) \leq \deg(\chi) \ \mathrm{per}\, A$.

Vermoeden 2.4.7. *Immanenten van totaal positieve matrices zijn niet-negatief.*

De veelvuldigheid en omvang van toepassingen met immanenten van willekeurige matrices blijft ondanks dergelijke afschattingen en vermoedens eerder beperkt. Een oorzaak volgens Stembridge, aldus [46, p. 1081], luidt: "One reason that immanants remain (deservedly) obscure is that there is very little known about it. [...]".

2.4.2 Genererende functies

Een andere manier om permanenten te interpreteren, is binnen het kader van genererende functies. Deze worden gebruikt om oneindige rijen van getallen te beschrijven door hen te beschouwen als coëfficiënten van een reeksontwikkeling.
In 1882 gaf Thomas Muir in [40, pp. 409 e.v.] een alternatieve manier om over de waarde van een permanent te denken, met behulp van een genererende functie. Voor het bewijs van zijn stelling laten we ons leiden door [37, pp. 23-25].

Stelling 2.4.8. *Zij $A = (a_{ij})$ een vierkante matrix van orde n. Dan is* $\mathrm{per}\, A$ *gelijk aan de coëfficiënt van $x_1 x_2 \cdots x_n$ in de expansie*

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right).$$

Bewijs. We tonen de stelling aan met behulp van inductie. Voor $n = 1$ verkrijgen we dat $A = (a_{11})$, $\mathrm{per}\, A = a_{11}$ en $\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = a_{11} x_1$, dus het gestelde geldt triviaal.

Veronderstel dat de stelling bewezen is voor $n = k$. Beschouw het product

$$B := \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k+1} a_{ij} x_j \right).$$

Gebruik makend van de assumptie dat de stelling waar is voor $n = k$, kunnen we de coëfficiënten vinden die horen bij

$$x_1 x_2 \cdots x_k,\ x_1 x_2 \cdots x_{k-1} x_{k+1},\ \ldots,\ x_2 x_3 \cdots x_{k+1}; \tag{2.4.1}$$

deze worden namelijk respectievelijk gegeven door

$$\operatorname{per} A(k+1|k+1),\ \operatorname{per} A(k+1|k),\ \ldots,\ \operatorname{per} A(k+1|1).$$

Bijgevolg vinden we:

$$\prod_{i=1}^{k+1} \left(\sum_{j=1}^{k+1} a_{ij} x_j \right) = \big(a_{k+1,1} x_1 + a_{k+1,2} x_2 + \ldots + a_{k+1,k+1} x_{k+1}\big) B.$$

Om de coëfficiënt te vinden die hoort bij $x_1 x_2 \cdots x_{k+1}$, moet de eerste term van (2.4.1) vermenigvuldigd worden met $a_{k+1,k+1} x_{k+1}$, de tweede term van (2.4.1) met $a_{k+1,k} x_k$, enzovoort, tot de laatste term van (2.4.1) vermenigvuldigd met $a_{k+1,1} x_1$. Dan wordt de coëfficiënt van $x_1 x_2 \cdots x_{k+1}$ gegeven door

$$\sum_{j=1}^{k+1} a_{k+1,i} \operatorname{per} A(k+1|i).$$

Deze uitdrukking stelt juist de expansie van de permanent van A voor van de $(k+1)$-de rij. Het gestelde is dus bewezen voor $n = k + 1$. □

Voorbeeld 2.4.9. Zij $A = (a_{ij})$ een vierkante matrix van orde 2. Dan wordt per A gegeven als coëfficiënt van $x_1 x_2$ in

$$(a_{11} x_1 + a_{12} x_2)(a_{21} x_1 + a_{22} x_2) = a_{11} a_{21} x_1^2 + (a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}) x_1 x_2 + a_{12} a_{22} x_2^2.$$

Opmerking 2.4.10. Een slimme manier om de coëfficiënt uit Stelling 2.4.8 te verkrijgen wordt in [52] gegeven door Herbert S. Wilf. Noteer hiertoe voor een $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$:

$$F(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right).$$

Dan stelt

$$\frac{\partial^n F}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} := \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

de coëfficiënt van $x_1 x_2 \cdots x_n$ en dus de permanent van A voor.

2.4.3 Permanent als inwendig product

Een helemaal andere invalshoek om permanenten (hier expliciet gezien als functies) te beschouwen, is door hen te representeren als inproducten op de symmetrieklasse van complete symmetrische tensoren (zie [39, pp. 19 e.v.] en [35, Section 3]). De basis voor deze interpretatie werd in 1961 gelegd door Marcus en Newman en was baanbrekend om nieuwe afschattingen met betrekking tot permanenten te bewijzen.

Zij V een n-dimensionale inproductruimte[2], waarin het inproduct gegeven wordt door (x, y). Met $M_m(V)$ stellen we de ruimte van m-multilineaire functionalen op V voor; dit is met andere woorden de ruimte van complexwaardige functies $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ die lineair zijn in elke x_i afzonderlijk, met $x_i \in V$ voor alle $i = 1, \ldots, m$.

Voorbeeld 2.4.11. Zij V de ruimte van complexe n-tuples, $m = n$ en $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$. Definieer nu $\phi(x_1, \ldots, x_m) := \det(x_{ij})$ en $\psi(x_1, \ldots, x_m) := \mathrm{per}(x_{ij})$. Dan geldt: $\phi \in M_n(V)$ en $\psi \in M_n(V)$.

Definitie 2.4.12. De ruimte $V^{(m)}$ wordt gedefinieerd als de duale ruimte van $M_m(V)$ en stelt de ruimte van alle complex-geëvalueerde lineaire functionalen op $M_m(V)$ voor, ook wel de **ruimte van m-contravariante tensoren** genoemd.
Als $x_i \in V$, met $i = 1, \ldots, m$, definiëren we $f = x_1 \otimes \ldots \otimes x_m$ als het element van $V^{(m)}$ wiens waarde op een willekeurige $\phi \in M_m(V)$ wordt gegeven door

$$f(\phi) = \phi(x_1, \ldots, x_m).$$

De tensor f wordt **decomposeerbaar** of **puur** genoemd.
Men zegt ook dat f het **tensorproduct** is van $x_1, \ldots, x_m$.

Opmerking 2.4.13. Niet alle tensoren zijn decomposeerbaar, maar ze kunnen wel allemaal geschreven worden als lineaire combinatie van decomposeerbare tensoren.

Als $e_1, \ldots, e_n$ een basis is van V, dan vormen de n^m tensorproducten $e_{\omega_1} \otimes \ldots \otimes e_{\omega_m}$ een basis van $V^{(m)}$, waarbij ω_i onafhankelijk loopt over $1, \ldots, n$ of kortweg: $\omega \in \Gamma_{m,n}$.
Een inproduct kan in $V^{(m)}$ geïntroduceerd worden in termen van het inproduct in V. De definiërende relatie wordt dan gegeven in termen van de waarden op paren van tensorproducten, namelijk:

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_m, y_1 \otimes \ldots \otimes y_m) = \prod_{i=1}^{m} (x_i, y_i).$$

Definitie 2.4.14. Zij σ een permutatie in S_m.

(i) We definiëren de lineaire operator $P(\sigma)$ op $V^{(m)}$ gegeven door

$$P(\sigma)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) := P(\sigma)x_1 \otimes \ldots \otimes x_m := x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}(m)}$$

als de **permutatie-operator**.

[2]Een inproductruimte is een vectorruimte over $\mathbb{C}$, waarop een inproduct gedefinieerd is dat hermitisch is, sesquilineair en positief-definiet.

(ii) De **compleet symmetrische operator** op $V^{(m)}$ wordt gedefinieerd door

$$T_m := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} P(\sigma).$$

(iii) Omdat T_m een som is van permutatie-operatoren op $V^{(m)}$, is T_m een afbeelding van $V^{(m)}$ naar een deelruimte van zichzelf. Het bereik van T_m wordt genoteerd als $V_{(m)}$ en noemen we de **symmetrieklasse** van compleet symmetrische tensoren.

(iv) Als $x_i \in V$, voor alle $i = 1, \ldots, m$, noteren we

$$x_1 * \ldots * x_m := T_m(x_1 \otimes \ldots \otimes x_m)$$

en noemen we dit het **symmetrisch product** van $x_1, \ldots, x_m$.

Voorbeeld 2.4.15. De compleet symmetrische operator op $V^{(2)}$ wordt gegeven door

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(P(\sigma_1) + P(\sigma_2)\right),$$

waarbij σ_1 de triviale permutatie op twee elementen voorstelt en σ_2 de permutatie die twee elementen van plaats verwisselt.
Voor willekeurige $x_1, x_2 \in V$ wordt het symmetrisch product dan gegeven door

$$x_1 * x_2 = T_2(x_1 \otimes x_2) = \frac{1}{2}(x_1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_1).$$

Lemma 2.4.16. *Zij $x_i \in V$, voor alle $i = 1, \ldots, m$. Dan geldt:*

(i) $P(\sigma)x_1 * \ldots * x_m = x_1 * \ldots * x_m$*;*

(ii) $T_m x_i \otimes \ldots \otimes x_i = x_i \otimes \ldots \otimes x_i$*;*

(iii) $T_m^2 = T_m$*, dus T_m is een idempotente operator;*

(iv) $T_m^* = T_m$*, dus T_m is een hermitische operator.*

Bewijs. De bewijzen volgen rechtstreeks uit de definitie van het symmetrisch product en de compleet symmetrische operator. Wegens Opmerking 2.4.13 volstaat het hierbij om de laatste twee beweringen na te gaan voor de inwerking op decomposeerbare tensoren. □

We hebben nu voldoende voorkennis opgebouwd om de permanent als inwendig product te representeren. Volgende uitdrukking zal in sommige bewijzen met betrekking tot permanenten verderop handig kunnen worden aangewend.

Stelling 2.4.17. *Zij $x_1, \ldots, x_m$ en $y_1, \ldots, y_m$ vectoren in V en zij $A = (a_{ij}) = ((x_i, y_j))$. Dan geldt:*

$$(x_1 * \ldots * x_m, y_1 * \ldots * y_m) = \frac{1}{m!} \operatorname{per}((x_i, y_j)) = \frac{1}{m!} \operatorname{per} A.$$

Bewijs. Door toepassing van bovenstaande definities en het hermitische en idempotente karakter van de compleet symmetrische operator T_m vinden we dat

$$(x_1 * \ldots * x_m, y_1 * \ldots * y_m) = (T_m x_1 \otimes \ldots \otimes x_m, T_m y_1 \otimes \ldots \otimes y_m)$$

$$
\begin{aligned}
&= (T_m T_m^* x_1 \otimes \ldots \otimes x_m, y_1 \otimes \ldots \otimes y_m) \\
&= (T_m x_1 \otimes \ldots \otimes x_m, y_1 \otimes \ldots \otimes y_m) \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} (P(\sigma) x_1 \otimes \ldots \otimes x_m, y_1 \otimes \ldots \otimes y_m) \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} (x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}(m)}, y_1 \otimes \ldots \otimes y_m) \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \prod_{i=1}^{m} (x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i) \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \prod_{i=1}^{m} (x_i, y_{\sigma(i)}) \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \prod_{i=1}^{m} a_{i,\sigma(i)} \\
&= \frac{1}{m!} \operatorname{per} A. \qquad \square
\end{aligned}
$$

2.4.4 Link met kwantumfysica

In de kwatummechanica is een Slater[3] determinant een uitdrukking die de golfbeweging van partikels beschrijft van een bepaald multifermionisch systeem, waarbij fermionen een van de twee klassen van niet-interactieve deeltjes beslaan. Aan de basis van de golfbeweging van bosonen, die andere klasse van deeltjes beschrijven, liggen permanenten.
Er kan worden aangetoond dat elke boson golffunctie, respectievelijk fermion golffunctie, geschreven kan worden als lineaire combinatie van permanenten, respectievelijk Slater determinanten. Bosonen en fermionen, en in het bijzonder dus ook permanenten en determinanten, liggen aan de basis van deze fysische theorie omtrent de tweede kwantisatie (zie [23]).

2.4.5 Gebruik in de combinatoriek

In tegenstelling tot het meetkundige toepassingsveld van determinanten, worden permanenten voornamelijk aangewend in de combinatoriek.

Een gekend voorbeeld dat met behulp van permanenten kan worden omschreven en opgelost, is het zogenaamde *ontmoetingsprobleem* of *problème des ménages*, dat voor het eerst werd beschreven door de Franse wiskundige Montmort in 1708. Het gaat als volgt: aan een ronde tafel moeten n koppels gezet worden. De n vrouwen nemen de oneven genummerde plaatsen $1, 3, \ldots, 2n-1$ in. Als geen enkele man naast zijn eigen vrouw mag zitten, op hoeveel manieren kunnen de mannen dan rond de tafel gezet worden? Zij $A = (a_{ij})$ de matrix waarvoor geldt dat

$$
a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } j - i \equiv 0 \bmod n \\ 0 & \text{als } j - i \equiv 1 \bmod n \\ 1 & \text{anders.} \end{cases}
$$

De permanent van deze binaire matrix A, die gebruikelijk genoteerd wordt met U_n en waar in de literatuur naar wordt verwezen als de *ménage numbers*, blijkt het antwoord te geven op het

[3] Genoemd naar de vermaarde Amerikaanse fysicus John Clarcke Slater, die in 1929 aan de basis van de invoering van deze determinant lag.

ontmoetingsprobleem (zie [51, Introduction]). We zullen dit nader onderzoeken.
Merk op dat we elementen van de i-de rij van A kunnen beschouwen als alle mogelijke posities voor de i-de man en j de zitplaats aangeeft tussen vrouw $j-1$ en vrouw j, voor alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ en waarbij vrouw $0 :=$ vrouw n. Een element van A is 1 wanneer de plaats is toegestaan en 0 anders. De permanent van A telt dan juist alle mogelijke configuraties met louter toegestane plaatsen.
Om de specifieke gedaante van A te beschrijven, lichten we toe wat $(0,1)$-circulanten zijn.

Definitie 2.4.18. Zij $P := P_n = (p_{ij})$ de permutatiematrix van orde n waarvoor geldt dat $p_{12} = p_{23} = \ldots = p_{n-1,n} = p_{n1} = 1$. Dan noemen we de matrix $\sum_{i=0}^{n-1} c_i P^i$ met $c_i \in \{0,1\}$ een $(0,1)$**-circulant**.

Voorbeeld 2.4.19. De acht $(0,1)$-circulanten van orde 3 worden gegeven door:

$$O_3, I_3, P := P_3 = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0 \end{pmatrix}, P^2 = \begin{pmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}, I_3+P, I_3+P^2, P+P^2, I_3+P+P^2 = J.$$

Met de permutatiematrix P uit Definitie 2.4.18 kunnen we bijgevolg schrijven:

$$U_n = \operatorname{per} A = \operatorname{per}(J - I_n - P) = \operatorname{per}\left(\sum_{i=2}^{n-1} P^i\right).$$

In [39, pp. 44-45] en [14] staat vermeld dat de volgende formule wordt toegeschreven aan de Fransman Jaques Touchard (1934):

$$\operatorname{per}\left(\sum_{i=2}^{n-1} P^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{2n}{2n-i}\binom{2n-i}{i}(n-i)!. \tag{2.4.2}$$

Voor het eerste combinatorische bewijs van deze identiteit, afkomstig van de Canadese-Amerikaanse wiskundige Kaplansky in 1943, wordt door diverse naslagwerken verwezen naar [29].
Voor het bewijs dat we hier geven, baseren ons op een inzichtelijkere methode van Bogart en Doyle (1986), dat gedeeltelijk een nog iets elegantere vorm kreeg dankzij Kirousis en Kontogeorgiou (zie [30]).

Stelling 2.4.20. $U_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{2n}{2n-i}\binom{2n-i}{i}(n-i)!$.

Bewijs. Wanneer we de n vrouwen hebben geplaatst (voor de volledigheid merken we op dat dit op $2n!$ verschillende manieren kan gebeuren), kunnen we ons afvragen: op hoeveel manieren kunnen we i niet-overlappende domino's (dit zijn 2-cykels waarvan 1 punt een man voorstelt en het andere punt de vrouw) plaatsen op een cykel met $2n$ plaatsen? Noem het aantal manieren d_i. Neem om d_i concreet te bepalen eerst een startpunt op de cykel; dit kan men doen op $2n$ verschillende manieren. Plaats nu de i domino's op de cykel, zonder vooraf het aantal lege plaatsen in elk van de i bogen tussen twee opeenvolgende domino's op de cykel vast te leggen. Op die i bogen bevinden zich in totaal $2n - 2i$ lege plaatsen. Het aantal mogelijkheden waarop de $2n-2i$ lege plaatsen over de i bogen kunnen worden verdeeld, wordt gegeven door het aantal mogelijke herhalingscombinaties van $2n-2i$ elementen uit een gegeven verzameling van i elementen en is dus $\binom{2n-i-1}{i-1}$. Dit aantal moeten we nog delen door i, omdat we tot nu toe meervoudig hebben geteld (elk van de i geplaatste domino's telde apart als de eerste). We bekomen dat $d_i = \frac{2n}{i}\binom{2n-i-1}{i-1}$ en kunnen dit deelresultaat nog herformuleren:

$$d_i = \frac{2n}{i} \cdot \frac{(2n-i-1)!}{(i-1)!(2n-2i)!} \cdot \frac{2n-i}{2n-i} = \frac{2n}{2n-i} \cdot \frac{(2n-i)!}{r!(2n-2i)!} = \frac{2n}{2n-i}\binom{2n-i}{i}.$$

We kunnen dus op $d_i = \frac{2n}{2n-i}\binom{2n-i}{i}$ manieren niet-overlappende domino's op de cykel plaatsen. Vervolgens zijn er nog $(n-i)!$ manieren om de n mannen zondanig te plaatsen dat minstens i van hen naast een vrouw zit; de i uniek bepaalde mannen zullen eerst de vrije plaatsen innemen in de respectieve i domino's en de overgebleven $n-i$ mannen worden toegekend aan de resterende lege plaatsen op de cykel. Alles tesamen vinden we nu, dankzij het principe van inclusie en exclusie (dat in Stelling 2.4.24 in herinnering wordt gebracht), de gestelde formule. □

Opmerking 2.4.21. Er bestaat slechts een gering aantal formules voor de berekening van permanenten van $(0,1)$-circulanten. Meer bepaald hebben combinatorische inzichten naast de formule van Touchard enkel geleid tot formules voor permanenten van $Q(n,k) := \sum_{i=0}^{k-1} P^i$ voor kleine waarden van k.

Voor andere voorbeelden van een combinatorisch probleem waarbij de permanent het antwoord geeft, putten we opnieuw inspiratie uit $(0,1)$-matrices en in het bijzonder uit incidentiematrices (zie [39, pp. 29 e.v.]).

Definitie 2.4.22. Zij $X_1, X_2, \ldots, X_m$ (niet noodzakelijk verschillende) deelverzamelingen van een verzameling $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

(i) Zij $A = (a_{ij})$ de binaire matrix waarin de elementen als volgt gedefinieerd zijn:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } x_j \in X_i \\ 0 & \text{als } x_j \notin X_i. \end{cases}$$

Dan wordt A de **incidentiematrix** genoemd voor de deelverzamelingen $X_1, X_2, \ldots, X_m$ van S.

(ii) Een rij $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ van m verschillende elementen van S vormt een **systeem van verschillende representanten (SDR)** als $s_i \in X_i$ voor $i = 1, \ldots, m$.

Incidentiematrices en de vraag of bepaalde configuraties een of meerdere SDR's bezitten, worden in het bijzonder aangewend om onder meer grafen, relaties en functies te representeren. We illustreren het gebruik van een incidentiematrix bij het onderzoek van het zogenaamde *dansprobleem*, waarbij de volgende vraag wordt gesteld: als er op een schooldans n jongens en n meisjes aanwezig zijn, en als elke jongen al precies k van deze meisjes eerder heeft ontmoet en ongekeerd elk meisje al precies k van deze jongens heeft ontmoet, is het dan mogelijk om de jongens en meisjes zodanig te koppelen als danspartners die elkaar al hebben ontmoet? En indien dit kan, op hoeveel manieren?
Als we met X_i de deelverzameling van meisjes noteren die eerder al voorgesteld zijn aan de i-de jongen, voor alle $i = 1, \ldots, n$, dan luidt het dansprobleem eigenlijk: heeft deze configuratie een SDR en zoja, hoeveel? We maken nu gebruik van een incidentiematrix om deze configuratie te representeren: beschouw een vierkante binaire matrix van orde n met precies k enen in elke rij en elke kolom, waarbij het element op positie (i,j) gelijk is aan 1 als de i-de jongen voorgesteld is aan het j-de meisje. De vraag luidt nu of het mogelijk is om n posities in deze matrix te kiezen, waarvan geen twee in dezelfde rij of kolom voorkomen, met elementen gelijk aan 1.

Zij $A = (a_{ij})$ de incidentiematrix voor deelverzamelingen $X_1, X_2, \ldots, X_m$ van een verzameling $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Als de configuratie een SDR heeft, dan bestaat er een permutatie σ van

$\{1,2,\ldots,n\}$ zodat $x_{\sigma(i)} \in X_i$ voor $i = 1,\ldots,m$. Per definitie van een incidentiematrix volgt dat $a_{i,\sigma(i)} = 1$ voor $i = 1,\ldots,m$.
De configuratie heeft dus een SDR als en slechts als er een permutatie σ bestaat zodanig dat

$$a_{1,\sigma(1)} = \ldots = a_{n,\sigma(n)} = 1,$$

of nog: als en slechts als

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 1.$$

Het aantal systemen van verschillende representanten is gelijk aan het aantal permutaties σ waarvoor $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 1$ geldt, dus is met andere woorden gelijk aan per $A = \sum_\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$.

Voorbeeld 2.4.23. We zoeken het aantal SDR's in de volgende configuratie van van deelverzamelingen van $\{x_1,x_2,x_3\}$: $X_1 = \{x_1,x_3\}, X_2 = \{x_1,x_2,x_3\}, X_3 = \{x_2\}$. De incidentiematrix van de configuratie wordt gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Het aantal SDR's is per $A = 2$. We kunnen deze twee SDR's ook concreet weergeven, namelijk: (x_1,x_3,x_2) en (x_3,x_1,x_2).

We onderzoeken ten slotte een specifieke variant van het dansprobleem, namelijk het zogenaamde *herschikkingsprobleem* of *the problem of derangements*: op hoeveel manieren kan een dans ingericht worden voor n koppels, zodat geen enkele man met zijn eigen vrouw danst? We zoeken met andere woorden het aantal permutaties van n elementen zonder de permutatie die alles fixeert, dus we zoeken het aantal 'herschikkingen'. Het antwoord wordt duidelijk gegeven door per$(J - I_n)$, waarvoor we nu een uitdrukking zullen bepalen. We zullen ons baseren op het gekende inclusie-exlusieprincie (zie [10, pp. 86-87] voor een bewijs), hier geformuleerd op basis van [21, pp. 9-10] .

Stelling 2.4.24. *Zij N het totale aantal objecten en $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ het aantal eigenschappen waarover we beschikken, met N_i het aantal objecten met eigenschap $P(i_1), P(i_2), \ldots, P(i_r)$. Dan gelden volgende uitspraken.*

(i) *Het aantal objecten $N(0)$ die aan geen van deze eigenschappen voldoen, wordt gegeven door de 'inversie-formule'*

$$N(0) = N - \sum_i N_i + \sum_{i_1<i_2} N_{i_1 i_2} + \ldots + (-1)^s \sum_{i_1<\ldots<i_s} N_{i_1\ldots i_s} + \ldots + (-1)^n N_{1\ldots n}.$$

(ii) *Het aantal objecten $N(r)$ met precies r eigenschappen wordt gegeven door de formule*

$$N(r) = \sum_{i_1<\ldots<i_r} N_{i_1\ldots i_r} + \ldots + (-1)^{s-r} \binom{s}{r} \sum_{i_1<\ldots<i_s} N_{i_1\ldots i_s} + \ldots \ .$$

Beschouw het herschikkingsprobleem, waarbij we het aantal permutaties $a_1, \ldots, a_n$ van $1, \ldots, n$ zoeken zodat $a_i \neq i$ voor alle $i = 1, \ldots, n$. Stel hiertoe de N objecten uit Stelling 2.4.24 gelijk aan de $n!$ permutaties $a_1, \ldots, a_n$ en beschouw $a_i = i$, voor alle $i = 1, \ldots, n$, als de eigenschap $P(i)$. Het aantal permutaties dat r fixeert wordt dan gegeven door $N_{i_1 \ldots i_r} = (n-r)!$ en het aantal manieren om $i_1, \ldots, i_r$ te kiezen uit $1, \ldots, n$ wordt gegeven door $\binom{n}{r}$, wat weergeeft hoeveel sommen $\sum_{i_1 < \ldots < i_r} N_{i_1 \ldots i_r}$ er zijn. We kunnen nu het inclusie-exclusieprincipe toepassen en vinden dat

$$N(0) = n! - n \cdot (n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^r \binom{n}{r}(n-r)! + \ldots + (-1)^n \cdot 1.$$

Bovenstaande uitdrukking laat zich nog herschrijven in de vorm

$$N(0) = n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^r \frac{1}{r!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right),$$

of nog:

$$N(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

We besluiten dus dat het antwoord op het herschikkingsprobleem wordt gegeven door

$$\mathrm{per}(J - I_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

Opmerking 2.4.25. De gevonden uitdrukking $N(0)$ valt voor de eerste n termen samen met de reeksontwikkeling voor $e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$. Aangezien deze reeksontwikkeling alternerend is en de eerste weggelaten term bij $N(0)$ ten opzichte van e^{-1} wordt gegeven door $(-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}$, vinden we dat $N(0)$ van $\frac{n!}{e}$ verschilt in minder dan $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)}$. Voor grote waarden van n geeft $\frac{n!}{e}$ dus een zeer goede benadering van de oplossing van het herschikkingsprobleem.

Opmerking 2.4.26. Het ontmoetingsprobleem kan worden beschouwd als een uitbreiding van het herschikkingsprobleem. We tonen hier aan dat de formule voor de oplossing van het ontmoetingsprobleem vrij eenvoudig volgt uit de formule voor de oplossing van het herschikkingsprobleem. Kies daartoe r getallen uit $1, \ldots, n$ op $\binom{n}{r}$ manieren, waarna we die gekozen getallen vermenigvuldigen met het aantal herschikkingen van de overgebleven $(n-r)$ getallen. Met dezelfde notatie als in Stelling 2.4.24(ii) kunnen we schrijven dat

$$N(n-r) = (n-r)! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^{n-r} \frac{1}{(n-r)!}\right)$$

en besluiten we na vermenigvuldiging met $\binom{n}{r}$ dat het aantal permutaties met precies r overeenkomsten $a_i = i$ wordt gegeven door

$$N(r) = \frac{n!}{r!} \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^{n-r} \frac{1}{(n-r)!}\right).$$

2.4.6 Gebruik in de grafentheorie

Een andere tak waarin permanenten soms handig worden aangewend, is de grafentheorie. De zonet besproken combinatorische configuraties met betrekking tot incidentiematrices kennen bijvoorbeeld hun equivalent met incidenties uit de grafentheorie. We brengen hiertoe eerst formeel de definitie van een graaf in herinnering.

Definitie 2.4.27. (i) Een **graaf** is een geordend paar $G = (V, E)$ bestaande uit een verzameling V van toppen[4] en een verzameling E van bogen[5], waarbij elke boog geassocieerd is met twee toppen en kan worden voorgesteld als een ongeordend paar van deze toppen. Een graaf is **enkelvoudig** als elke boog incident is met twee verschillende toppen, of nog: als de graaf geen lussen bevat.

(ii) De **adjacentierelatie** van een ongerichte en enkelvoudige graaf $G = (V, E)$ is de symmetrische binaire relatie op V die door G geïnduceerd wordt. Twee toppen die aan de adjacentierelatie voldoen, worden **adjacent** genoemd.

(iii) Zij $G = (V, E)$ een enkelvoudige graaf, met $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. De **adjacentiematrix** $A := A(G) = (a_{ij})$ van G is de symmetrische binaire matrix van orde n waarvoor $a_{ij} = 1$ als en slechts als v_i en v_j incident zijn met een boog uit E ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$).

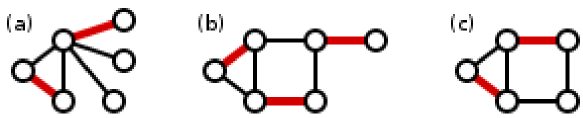
Het is duidelijk dat de combinatorische configuraties uit de vorige paragraaf, zoals het *dansprobleem*, ook met een graaf en de bijhorende adjacentiematrix kunnen worden voorgesteld.
We gaan even dieper in op een grafentheoretische interpretatie van de permanent, die te pas komt bij de berekening van koppelingen in een bipartiete graaf. Hiertoe vullen we Definitie 2.4.27 met nog enkele grafentheoretische concepten aan.

Definitie 2.4.28. (i) Een **onafhankelijke** (of stabiele) **verzameling** is een verzameling van toppen in een graaf, waarvan er geen twee adjacent zijn.

(ii) Een **bipartiete graaf** $G = (U, V, E)$ is een graaf waarvan de toppen kunnen worden onderverdeeld in twee disjuncte en onafhankelijke verzamelingen U en V zodanig dat elke boog van G een top uit U verbindt met een top uit V.

(iii) Een **matching** in een graaf is een deelverzameling van haar bogen, waarbij geen twee bogen eenzelfde top delen. Een **perfecte matching** in een graaf is een matching die alle toppen van de graaf bevat.

Voorbeeld 2.4.29. Beschouw in onderstaande grafen de deelverzameling van bogen gemarkeerd door de vetgedrukte lijnen. Per definitie volgt direct dat enkel (b) een perfecte matching toont.



Het blijkt dat de permanent van een binaire matrix geïnterpreteerd kan worden als het aantal perfecte matchings in een bipartiete graaf. Wanneer we meer bepaald een binaire vierkante matrix $A = (a_{ij})$ van orde n gegeven hebben, kunnen we een bipartiete graaf $G = (U, V, E)$ definiëren, waarbij $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ en er een boog is tussen $u_i \in U$ en $v_j \in V$ als en slechts als $a_{ij} = 1$ ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$). Per definitie van de permanent volgt dan direct dat per A gelijk is aan het aantal perfecte matchings in G.
Uitgebreid onderzoek over begrenzingen van het aantal perfecte matchings in bepaalde klassen van bipartiete grafen is onder meer terug te vinden in [4] en [13].

[4] in het Engels: *vertices*
[5] in het Engels: *edges*

In [28] wordt aansluitend ingegaan op de mogelijkheid en de bijhorende vereisten om de permanent van een binaire matrix te benaderen door het genereren van perfecte matchings met behulp van een Markovketen[6] waarvan de toestanden worden voorgesteld door de matchings in de graaf.

2.4.7 Gebruik in de waarschijnlijkheidsrekening

In 1968 suggereerde de Californische wiskundige L. H. Harper de volgende betekenis met betrekking tot kansberekening voor de permanent van een rijstochastische $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ (zie [39, pp. 135 e.v.] en [41, pp. 49-50]).
Beschouw n boxen, gelabeld van 1 tot n. Veronderstel dat elke box initieel precies een bal bevat. Laat dan alle ballen gelijktijdig en willekeurig rollen, waarbij de kans dat een bal van de i-de naar de j-de box rolt gegeven wordt door a_{ij}. Dan is per $A \in [0, 1]$ de kans van de gebeurtenis dat na een dergelijke verschuiving elke box precies een bal zal bevatten.

Voorbeeld 2.4.30. Beschouw twee boxen, gelabeld als box 1 en box 2. Elke box bevat als beginfase een bal. We zullen nu met enkele eenvoudige gevallen illustreren dat de kans op de hierboven beschreven gebeurtenis inderdaad gegeven wordt door de permanent van de beschouwde matrix.

(i) Stel dat de kans dat een bal bij verschuiving van box 1 naar box 2 rolt gelijk is aan 0.9, terwijl de kans dat een bal van box 2 naar box 1 rolt gegeven wordt door 0.2. De kans dat een bal uit box 1, respectievelijk box 2 zich na verschuiving opnieuw in box 1, respectievelijk box 2 bevindt, is dus 0.1, respectievelijk 0.8. De bijhorende rijstochastische matrix is dan $A = \left(\begin{smallmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.2 & 0.8 \end{smallmatrix}\right)$ en per $A = 0.08 + 0.18 = 0.26$. De kans dat elke box een bal zal bevatten wordt inderdaad gegeven door de som van de kansen van de gunstige situaties, namelijk: bal 1 blijft liggen in box 1 en bal 2 in box 2 (de kans op deze situatie is $0.1 \cdot 0.8$) of bal 1 rolt naar box 2 en bal 2 rolt naar box 1 (de kans op deze situatie is $0.9 \cdot 0.2$).

(ii) Als we met zekerheid weten dat elke bal uit box 2 verschuift naar box 1 en dat elke bal uit box 1 blijft liggen, bekomen we bijgevolg dat per $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$. Dit komt trivialerwijze overeen met de concrete kansberekening.

(iii) Als 0.5 voor beide boxen de kans is om van de ene naar de andere te rollen, is de kans dat na verschuiving elke box een bal bevat gelijk aan $\text{per}(J_2) = 0.5$.

Opmerking 2.4.31. Wanneer we de situatie beperken tot dubbelstochastische matrices, weten we omwille van de recente bevestiging van het vermoeden van Bartel Leendert van der Waerden (zie verderop) dat de minimale kanswaarde gegeven wordt door per $J_n = n!/n^n$.

2.5 Identiteiten en afschattingen

Na enkele ontontbeerlijke eigenschappen, berekingswijzen en interpretaties van permanenten uit de vorige sectie spitsen we ons toe op een aantal interessante afschattingen en identiteiten. Dat deze vervolgens handig kunnen worden aangewend om tot gedeeltelijke oplossingen van vermoedens omtrent permanenten te komen, zullen we in een volgend deel illustreren met de

[6] Een Markovketen is een stochastisch model dat een reeks mogelijke gebeurtenissen beschrijft waarbij de waarschijnlijkheid van elke gebeurtenis alleen afhangt van de toestand die in de vorige gebeurtenis is bereikt.

verdieping in het vermoeden van Van der Waerden. We herinneren daarnaast aan het feit dat de evaluatie van permanenten geen evidentie is, dus ook begrenzingen van permanenten op zichzelf − zeker met behulp van enkele eenvoudig berekenbare operaties zoals rij- en kolomsommen − zijn van aanzienlijk belang binnen de lineaire algebra. Redenen genoeg dus om uitgebreid stil te staan bij enkele voorname identiteiten en afschattingen met betrekking tot permanenten.

2.5.1 Stelling van Frobenius-König

In deze sectie behandelen we een van de meest fundamentele resultaten in de theorie van permanenten van niet-negatieve matrices, die de stelling van Frobenius-König wordt genoemd. De Duitse wiskundige Ferdinand Georg Frobenius en de Hongaar Gyula König hebben immers elk vanuit hun eigen invalshoek de stelling en haar bewijs meermaals herformuleerd en herwerkt. We zullen in bewijzen van andere uitspraken verderop meermaals terugvallen op deze stelling.

Stelling 2.5.1 (Frobenius-König)**.** *Zij A een $n \times n$-matrix. Dan bevat elke diagonaal van A een nulelement als en slechts als A een $s \times t$-nul-deelmatrix bevat zodat $s + t = n + 1$.*

Voor een matrix A die enkel niet-negatieve elementen bezit, kunnen we de stelling van Frobenius en König equivalent formuleren, aangezien de permanent van een matrix per definitie de som van de diagonaalproducten is. We zullen onderstaande equivalente stelling aantonen, gebaseerd op het bewijs uit [39, pp. 31 e.v.].

Stelling 2.5.2. *Zij A een niet-negatieve $n \times n$-matrix. Dan is* $\operatorname{per} A = 0$ *als en slechts als A een $s \times t$-nul-deelmatrix bevat zodat $s + t = n + 1$.*

Bewijs. We gaan eerst uit van $\operatorname{per} A = 0$ en geven het bewijs met inductie op de orde van A. Als $n = 1$, geldt de stelling triviaal wegens $A = (0)$. Neem aan dat de stelling waar is voor alle matrices met orde kleiner dan n. Als A de $n \times n$-nulmatrix is, is de stelling triviaal voldaan. Veronderstel dus dat $a_{hk} > 0$, voor zekere $1 \leq h, k \leq n$. Dan is

$$0 = \operatorname{per} A = \sum_{j=1}^{n} a_{hj} \operatorname{per} A(h|j),$$

waaruit volgt dat $\operatorname{per} A(h|k) = 0$, aangezien alle producten $a_{hj} \operatorname{per} A(h|j)$ niet-negatief zijn en $a_{hk} > 0$. Door toepassing van de inductiehypothese vinden we een $s_1 \times t_1$-nul-deelmatrix van $A(h|k)$ zodat $s_1 + t_1 = (n - 1) + 1$. Na permutatie van de rijen en kolommen van A kunnen we de volgende gedaante verkrijgen:

$$B = PAQ = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Z & Y \end{array} \right),$$

waarbij X een $s_1 \times (n - t_1)$-matrix is en Y een $(n - s_1) \times t_1$-matrix. Omdat $s_1 > 0$, $t_1 > 0$ en $s_1 + t_1 = n$, zijn $(n - t_1)$ en $(n - s_1)$ beide verschillend van nul. Uit het feit dat $n - s_1 = t_1$ en $n - t_1 = s_1$ volgt nu dat X een vierkante matrix is van orde s_1 en Y een vierkante matrix van orde t_1. Aangezien we ook al weten dat de permanent van een matrix invariant is onder permutaties van rijen en kolommen van die matrix, besluiten we dat

$$0 = \operatorname{per} A = \operatorname{per} B = \operatorname{per} X \operatorname{per} Y.$$

Neem zonder de algemeenheid te schaden aan dat $\operatorname{per} X = 0$. We kunnen opnieuw de inductiehypothese toepassen om te vinden dat X een $u \times v$-nul-deelmatrix bevat zodat $u + v = s_1 + 1$.

We stellen die nulmatrix met de gekende notaties voor als $X[\alpha_1, \ldots, \alpha_u|\beta_1, \ldots, \beta_v] = 0$, wat eigenlijk neerkomt op $B[\alpha_1, \ldots, \alpha_u|\beta_1, \ldots, \beta_v] = 0$. Beschouw nu de volgende nul-deelmatrix van B met u rijen en $v + t_1$ kolommen:

$$B[\alpha_1, \ldots, \alpha_u|\beta_1, \ldots, \beta_v, n - t_1 + 1, n - t_1 + 2, \ldots, n] = 0.$$

Er geldt dat

$$u + v + t_1 = u + v + n - s_1 = s_1 + 1 + n - s_1 = n + 1,$$

waaruit het gestelde volgt.
Veronderstel omgekeerd dat A een $s \times t$-deelmatrix bevat waarvoor $s+t = n+1$. We permuteren de rijen en kolomen van A zodanig dat

$$B = PAQ = \left(\begin{array}{c|c} 0 & X \\ \hline Z & Y \end{array}\right),$$

waarbij de nulmatrix bestaat uit s rijen en t kolommen. Achtereenvolgens de invariantie van de permanent onder permutatiematrices en de ontwikkeling van Laplace toepassen levert op dat

$$\operatorname{per} A = \operatorname{per} B = \sum_{\omega \in Q_{s,n}} \operatorname{per} B[1, \ldots, s|\omega] \; \operatorname{per} B(1, \ldots, s|\omega).$$

Merk op dat $B[1, \ldots, s|\omega]$ een deelmatrix van orde s is van $B[1, \ldots, s|1, \ldots, n]$ en deze laatstgenoemde matrix bevat maximum $n - t = (s + t - 1) - t = s - 1$ niet-nulkolommen. Hieruit volgt dat elke deelmatrix $B[1, \ldots, s|\omega]$ minstens een nulkolom moet bevatten en voor alle $\omega \in Q_{s,n}$ geldt dus dat $B[1, \ldots, s|\omega] = 0$. We besluiten dat $\operatorname{per} A = 0$. □

We vermelden als aanvulling een gevolg voor volledig niet-decomposeerbare matrices.

Gevolg 2.5.3. *Een niet-negatieve $n \times n$-matrix A is volledig niet-decomposeerbaar als en slechts als* $\operatorname{per} A(i|j) > 0$ *voor alle $i, j = 1, \ldots, n$.*

Bewijs. Uit Stelling 2.5.2 halen we dat $\operatorname{per} A(i|j) = 0$ voor zekere $1 \leq i, j \leq n$ als en slechts als de deelmatrix $A(i|j)$ en bijgevolg ook A een $s \times t$-nulmatrix bevat met $s + t = n$. Met andere woorden: $\operatorname{per} A(i|j) = 0$ voor zekere $1 \leq i, j \leq n$ als en slechts als A gedeeltelijk decomposeerbaar is. Het gestelde volgt nu door ontkenning van deze uitspraak. □

De stelling van Frobenius-König kan worden veralgemeend voor matrices die niet noodzakelijk vierkant hoeven te zijn.

Gevolg 2.5.4. *Zij A een niet-negatieve $m \times n$-matrix, met $m \leq n$. Dan geldt dat* $\operatorname{Per} A = 0$ *als en slechts als A een $s \times (n - s + 1)$-nulmatrix bevat.*

Bewijs. Het geval waarvoor $m = n$, is juist de stelling van Frobenius-König. Veronderstel dus dat $m < n$. Beschouw de vierkante matrix

$$B = \left(\begin{array}{c} A \\ \hline C \end{array}\right),$$

met C een $(n - m) \times n$-matrix waarvan alle elementen gelijk zijn aan 1. Uit de stelling van Frobenius-König weten we dat $\operatorname{per} B = 0$ als en slechts als B een $s \times (n - s + 1)$-nul-deelmatrix bevat. Wegens de opgelegde gedaante van C moet deze nulmatrix bevat zitten in A. Het gestelde volgt nu omdat we ook kunnen berekenen dat $\operatorname{per} B = (n - m)! \operatorname{Per} A$. □

Gebruik makend van de (alternatieve) stelling van Frobenius en König vinden we nu een interessante uitspraak over dubbelstochastische matrices (zie [39, pp. 35-36] en [3, Sectie 1.8]).

Stelling 2.5.5. *Zij A een dubbelstochastische $n \times n$-matrix. Dan geldt:* $\operatorname{per} A > 0$.

Bewijs. Aangezien A dubbelstochastisch is, weten we al dat $\operatorname{per} A$ niet-negatief is. Veronderstel nu dat $\operatorname{per} A = 0$. Uit de vorige stelling weten we dat A een $s \times t$-nul-deelmatrix bevat zodat $s + t = n + 1$. We weten ook dat de permanent van een matrix invariant is onder permutaties van rijen en kolommen van die matrix, dus we kunnen zonder de algemeenheid te schaden de volgende gedaante voor A aannemen:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right),$$

waarbij de nulmatrix afmetingen $s \times t$ heeft, en B dus een $(n-s) \times t$-matrix en D een $s \times (n-t)$-matrix is. Uit $s + t = n + 1$ halen we nu dat D afmetingen $s \times (s - 1)$ heeft en dus meer rijen dan kolommen bezit. Aangezien A dubbelstochastisch is, sommeren al deze rijen van D tot 1. Hieruit volgt dat er minstens een kolom van D bestaat met een kolomsom groter dan 1 en zo ook de corresponderende kolom van A. Dit is echter in strijd met het feit dat A een dubbelstochastische matrix is. □

Gevolg 2.5.6. *Elke dubbelstochastische matrix heeft een positieve diagonaal.*

Bewijs. Zij A een dubbelstochastische matrix. Omdat $\operatorname{per} A$ per definitie de som van de diagonaalproducten van A is en we al weten dat $\operatorname{per} A > 0$, is minstens een van de diagonaalproducten positief. □

We kunnen nu een van de fundamentele resultaten uit de theorie van dubbelstochastische matrices aantonen (zie [39, pp. 36-37] en [3, Sectie 1.8]).

Stelling 2.5.7 (Birkhoff, 1946)**.** *Zij $A \in \Omega_n$. Dan geldt:*

$$A = \sum_{j=1}^{s} \theta_j P_j,$$

met $P_1, \ldots, P_s$ permutatiematrices en $\theta_1, \ldots, \theta_s$ niet-negatieve reële getallen met $\sum_{j=1}^{s} \theta_j = 1$.

Bewijs. We bewijzen de stelling met inductie op $\pi(A)$, het aantal positieve elementen in A. Voor de inductiebasis beschouwen we het geval $\pi(A) = n$: dan is A een permutatiematrix en volgt het resultaat direct met $s = 1$. Veronderstel nu dat $\pi(A) > n$ en dat de stelling geldt voor alle matrices in Ω_n met minder dan $\pi(A)$ positieve elementen. Aangezien A dubbelstochastisch is, heeft A een zekere positieve diagonaal $(a_{\sigma(1),1}, a_{\sigma(2),2}, \ldots, a_{\sigma(n),n})$. Zij $a_{\sigma(t),t} = \min_i(a_{\sigma(i),i}) =: a$ en $P = (p_{ij})$ de permutatiematrix met $p_{\sigma(i),i} = 1$, voor alle $i = 1, \ldots, n$ (ook wel de incidentiematrix van de permutatie σ genoemd). Als $a = 1$, zou wegens de minimaliteit van a en het dubbelstochastisch zijn van A gelden dat $a_{\sigma(i),i} = 1$, voor alle $i = 1, \ldots, n$. Dus A zou dan een permutatiematrix zijn, in strijd met $\pi(A) > n$. Er geldt dus dat $0 < a < 1$. We beweren vervolgens dat de matrix

$$B := (b_{ij}) := \frac{1}{1-a}(A - aP)$$

dubbelstochastisch is. Inderdaad: enerzijds geldt voor alle $i, j = 1, \ldots, n$ dat $b_{ij} \geq 0$, want $\frac{1}{1-a} > 1$ en $a_{ij} - ap_{ij} \geq 0$ wegens de minimaliteit van a. Anderzijds vinden we voor alle $i = 1, \ldots, n$ dat ook

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \frac{1}{1-a} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - ap_{ij}) = \frac{1}{1-a} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) - a \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \right] = \frac{1}{1-a}(1-a) = 1$$

en geheel analoog geldt voor alle $j = 1, \ldots, n$ dat $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 1$. Omdat B ten opzichte van A alle nulelementen ongewijzigd laat en bovendien $b_{\sigma(t),t} = 0$, volgt dat $\pi(B) \leq \pi(A) - 1$. We passen nu de inductiehypothese toe op B en verkrijgen dat

$$B = \sum_{j=1}^{s-1} \phi_j P_j,$$

met P_j permutatiematrices, $\phi_j \geq 0$ voor alle $j = 1, \ldots, s-1$ en $\sum_{j=1}^{s-1} \phi_j = 1$. Door A te schrijven in functie van B vinden we dat

$$A = (1-a)B + aP = \left(\sum_{j=1}^{s-1} (1-a)\phi_j P_j \right) + aP = \sum_{j=1}^{s} \theta_j P_j,$$

waarbij $\theta_j = (1-a)\phi_j$ voor alle $j = 1, \ldots, s-1$, $\theta_s = a$ en $P_s = P$. Dat alle θ_j niet-negatief zijn, volgt direct uit $1 - a > 0$ en het niet-negatief zijn van elke ϕ_j. Dat alle θ_j sommeren tot 1, zien we ten slotte in als volgt:

$$\sum_{j=1}^{s} \theta_j = \left(\sum_{j=1}^{s-1} (1-a)\phi_j \right) + a = (1-a) \sum_{j=1}^{s-1} \phi_j + a = 1 - a + a = 1.$$

Dit besluit de stelling. □

Opmerking 2.5.8. De stelling van Birkhoff kan ook meetkundig geïnterpreteerd worden: de verzameling van dubbelstochastische matrices vormt een convex veelvlak met permutatiematrices als hoekpunten.

2.5.2 Begrenzingen voor permanenten en determinanten

Met een eerste en eenvoudige afschatting brengen we de permanent van een matrix in verband met de determinant en het product van de rijsommen van een matrix.

Stelling 2.5.9. *Zij A een niet-negatieve vierkante matrix van orde n. Dan geldt:*

$$|\det A| \leq \operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} r_i,$$

waarbij r_i de som van de elementen op de i-de rij van A voorstelt.

Bewijs. De driehoeksongelijkheid zegt ons dat voor alle reële a, b geldt dat $|a - b| \leq |a| + |b|$. Omdat alle elementen van A niet-negatief verondersteld worden, volgt $|\det A| \leq \operatorname{per} A$ nu onmiddellijk per definitie van de determinant en de permanent van A.
De $n!$ termen die men bekomt bij de berekening van de permanent van een $n \times n$-matrix vormen steeds een deelverzameling van de n^n termen die men verkrijgt door het product van de rijsommen van die matrix distributief uit te werken. Aangezien alle elementen van A niet-negatief zijn, volgt nu de rechtse ongelijkheid. □

In [12] formuleren en bewijzen de wiskundigen Gernot M. Engel en Hans Schneider heel wat afschattingen met betrekking tot permanenten en determinanten. Omdat deze begrenzingen een aantal niet-triviale voorafgaande beschouwingen vereisen die niet bijdragen tot resultaten waartoe we in deze uiteenzetting wensen te komen, beperken we ons tot de verwijzing ernaar voor de geïnteresseerde lezer.

In bepaalde specifieke gevallen, namelijk voor positief semi-definiete hermitische matrices A, zal sterker dan Stelling 2.5.9 gelden:

$$\det A \leq \operatorname{per} A. \tag{2.5.1}$$

Deze ongelijkheid werd voor het eerst geformuleerd door Issai Schur in [44]. We zullen dit statement aantonen in de bijhorende sectie over ondergrenzen van positief semi-definiete hermitische matrices, waarin we eerst enkele andere onontbeerlijke resultaten met betrekking tot dergelijke matrices zullen formuleren en staven.

2.5.3 Bovengrenzen voor permanenten van binaire matrices

De evaluatie van de permanent van een $(0,1)$-matrix is een zogenaamd P-compleet probleem (zie bijvoorbeeld [49]). Het is dan ook niet verwonderlijk dat het zoeken naar bovengrenzen voor de permanent van een binaire matrix een onvermijdelijke plaats heeft ingenomen in het onderzoek naar (afschattingen voor) permanenten. Er bestaan twee vrij gekende bovengrenzen die in de loop der jaren vermoed, gestaafd en meermaals bewezen werden (zie [32, pp. 291-292] en [39, p. 107]). Alvorens we de eerste afschatting en haar bewijs geven, voeren we een hulpstelling in (beiden geïnspireerd op [39, p. 116, problems 3-4] en [38, pp. 789-791]).

Lemma 2.5.10. *Zij $r_1, \ldots, r_c$ natuurlijke getallen verschillend van nul. Dan geldt:*

$$\sum_{j=1}^{c} \frac{2}{r_j} \prod_{t=1}^{c} \frac{r_t}{r_t+1} \leq 1,$$

met gelijkheid als en slechts als $c \leq 2$ en ofwel r_1 ofwel r_2 gelijk is aan 1.

Bewijs. Met E_s noteren we de s-de elementaire symmetrische functie van $1/r_1, \ldots, 1/r_c$, met andere woorden:

$$E_s := E_s(\frac{1}{r_1}, \ldots, \frac{1}{r_c}) = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_s \leq c} \frac{1}{r_{j_1}} \cdots \frac{1}{r_{j_s}}, \quad \text{met } E_s(\frac{1}{r_1}, \ldots, \frac{1}{r_c}) = 0 \text{ als } s > c.$$

Per conventie is $E_0 = 1$. Er geldt de volgende uitdrukking voor de monische veelterm in de variabele λ waarvan de wortels gegeven worden door $1/r_1, \ldots, 1/r_c$ en waarvan de coëfficiënten op hun teken na de elementaire symmetrische functies voorstellen (deze relaties tussen de wortels en de coëfficiënten van een veelterm staan gekend als de formules van Vieta):

$$\prod_{t=1}^{c}(\lambda - \frac{1}{r_t}) = \lambda^c - E_1\lambda^{c-1} + E_2\lambda^{c-2} + \ldots + (-1)^c E_c.$$

Voor $\lambda = 1$ verkrijgen we de volgende identiteit:

$$\prod_{t=1}^{c}(1 - \frac{1}{r_t}) = 1 - E_1 + E_2 - E_3 + \ldots + (-1)^c E_c.$$

Omdat $r_t \geq 1$ voor alle $t = 1, \ldots, c$, volgt dat

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - E_1 + E_2 - E_3 + \ldots + (-1)^c E_c, \text{ of nog:} \qquad (2.5.2) \\ 2E_1 &\leq 1 + E_1 + E_2 - E_3 + \ldots + (-1)^c E_c. \end{aligned}$$

met gelijkheid als en slechts als $r_t = 1$ voor een zekere t. Uiteraard geldt ook de zwakkere afschatting

$$2E_1 \leq \prod_{t=1}^{c} \left(1 + \frac{1}{r_t}\right) \iff 2\sum_{j=1}^{c} \frac{1}{r_j} \leq \prod_{t=1}^{c} \frac{r_t + 1}{r_t} \iff \sum_{j=1}^{c} \frac{2}{r_j} \prod_{t=1}^{c} \frac{r_t}{r_t + 1} \leq 1.$$

De bekomen ongelijkheid is strikt, behalve in het geval dat (2.5.2) een gelijkheid is en $E_3 = 0$, opdat de gelijkheden kunnen worden doorgetrokken bij de zwakkere afschatting. Merk op dat uit $E_3 = 0$ volgt dat ook $E_4 = E_5 = \ldots = E_c = 0$, dus in geval van gelijkheid geldt dat $c \leq 2$ en $r_t = 1$ voor $t = 1, 2$. Omgekeerd is het duidelijk dat we gelijkheid verkrijgen in de volgende drie gevallen: $c = 1$ en $r_1 = 1$; $c = 2$ en $r_1 = 1$; $c = 2$ en $r_2 = 1$. □

Stelling 2.5.11. *Zij $A = (a_{ij})$ een vierkante binaire matrix van orde n en $r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{r_i + 1}{2},$$

met gelijkheid als en slechts als A een permutatiematrix is.

Bewijs. We gebruiken inductie op n, de orde van A. Voor $n = 1$ doen zich twee triviale gevallen voor: $\operatorname{per}(0) = 0 < \frac{1}{2}$ en $\operatorname{per}(1) = 1$. Aangezien $\operatorname{per} A$ invariant is onder permutaties van rijen, mogen we aannemen dat $a_{i1} = 1$ voor alle $i = 1, \ldots, c$ en $a_{i1} = 0$ voor alle $i = c + 1, \ldots, n$. We passen nu voor elke $i = 1, \ldots, c$ de inductiehypothese toe op de $(n - 1) \times (n - 1)$-matrix $A(i|1)$ en herschrijven de uitdrukking vervolgens zodanig dat de i-de rij expliciet in rekening wordt gebracht:

$$\operatorname{per} A(i|1) \leq \left(\prod_{t=1,\ t\neq i}^{c} \frac{r_t}{2} \right) \left(\prod_{j=c+1}^{n} \frac{r_j + 1}{2} \right) = \frac{2}{r_i} \left(\prod_{t=1}^{c} \frac{r_t}{r_t + 1} \right) \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{r_j + 1}{2} \right).$$

De gelijkheid geldt als en slechts als $A(i|1)$ een permutatiematrix is. We kunnen nu de regel van Laplace toepassen op de eerste kolom van A en verkrijgen dat

$$\operatorname{per} A = \sum_{i=1}^{c} \operatorname{per} A(i|1) \leq \sum_{i=1}^{c} \frac{2}{r_i} \left(\prod_{t=1}^{c} \frac{r_t}{r_t + 1} \right) \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{r_j + 1}{2} \right) \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{r_i + 1}{2},$$

waarbij de laatste ongelijkheid volgt uit het voorgaande lemma. We weten dan ook dat de gelijkheid geldt als en slechts als de matrices $A(i|1)$ permutatiematrices zijn voor alle $i = 1, \ldots, c$, en bovendien $c \leq 2$ en $r_1 = 1$ of $r_2 = 1$. Dit impliceert dat A zelf een permutatiematrix is. □

De tweede en nog krachtigere bovengrens, waarvan het vermoeden pas later dan de vorige werd bevestigd, stelt dat $\operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^n (r_i!)^{1/r_i}$ voor een binaire matrix A van orde n met rijsommen $r_1, \ldots, r_n$. Deze afschatting werd in 1963 door Henryk Minc als vermoeden geformuleerd en 10 jaar later door Lev M. Brégman voor het eerst bewezen. In het bewijs en het voorafgaande lemma dat we hieronder geven, laten we ons echter leiden door het elegantere en veel kortere bewijs van de Nederlandse wiskundige Alexander Schrijver (zie [43] en [39, pp. 107-109]).

Lemma 2.5.12. *Zij $t_1, \dots, t_r$ niet-negatieve reële getallen. Dan geldt:*

$$\left(\frac{t_1 + \dots + t_r}{r}\right)^{t_1+\dots+t_r} \leq t_1^{t_1} \dots t_r^{t_r}.$$

Bewijs. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x \log(x)$. Deze functie is duidelijk convex[7] en in het bijzonder ook middelpuntconvex; er geldt met andere woorden dat

$$\left(\frac{t_1 + \dots + t_r}{r}\right) \log\left(\frac{t_1 + \dots + t_r}{r}\right) \leq \frac{t_1 \log t_1 + \dots + t_r \log t_r}{r}.$$

Door beide leden van de ongelijkheid te vermenigvuldigen met r en vervolgens de exponent te nemen, bekomen we de gezochte ongelijkheid. $\square$

Stelling 2.5.13. *Zij A een vierkante binaire matrix van orde n en $r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^n r_i!^{1/r_i}.$$

Bewijs. We gebruiken inductie op n. De inductiebasis is triviaal: voor $n = 1$ geldt namelijk dat $\operatorname{per} A = 0$ of $\operatorname{per} A = 1$. Veronderstel nu dat de stelling bewezen is voor een $(0,1)$-matrix van orde $n-1$. We zullen volgende ongelijkheid aantonen, waaruit het gestelde dan volgt:

$$(\operatorname{per} A)^{n \operatorname{per} A} \leq \left(\prod_{i=1}^n r_i!^{1/r_i}\right)^{n \operatorname{per} A}.$$

Zij i, j en k variabelen van 1 tot n en zij S de verzameling van alle permutaties σ zodat $\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = 1$, dus $a_{i,\sigma(i)} = 1$ voor alle $i = 1, \dots, n$. Er gelden nu volgende gelijkheden en ongelijkheden, die we verderop verklaren:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{per} A)^{n \operatorname{per} A} &= \prod_{i=1}^n (\operatorname{per} A)^{\operatorname{per} A} \\
&\overset{\text{(i)}}{=} \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \operatorname{per} A(i|k)\right)^{\sum_{k=1}^n a_{ik} \operatorname{per} A(i|k)} \\
&\overset{\text{(ii)}}{\leq} \prod_{i=1}^n \left(r_i^{\operatorname{per} A} \prod_{\substack{k \\ a_{ik}=1}} \operatorname{per} A(i|k)^{\operatorname{per} A(i|k)} \right) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} \prod_{\sigma \in S} \left(\left(\prod_{i=1}^n r_i\right) \left(\prod_{i=1}^n \operatorname{per} A(i|\sigma(i))\right) \right) \\
&\overset{\text{(iv)}}{\leq} \prod_{\sigma \in S} \left(\left(\prod_{i=1}^n r_i\right) \left(\prod_{i=1}^n \Big(\prod_{\substack{j,\ j \neq i \\ a_{j\sigma(i)}=0}} r_j!^{1/r_j} \Big) \Big(\prod_{\substack{j,\ j \neq i \\ a_{j\sigma(i)}=1}} (r_j - 1)!^{1/(r_j-1)} \Big) \right) \right) \\
&\overset{\text{(v)}}{=} \prod_{\sigma \in S} \left(\left(\prod_{i=1}^n r_i\right) \left(\prod_{j=1}^n \Big(\prod_{\substack{i,\ i \neq j \\ a_{j\sigma(i)}=0}} r_j!^{1/r_j} \Big) \Big(\prod_{\substack{i,\ i \neq j \\ a_{j\sigma(i)}=1}} (r_j - 1)!^{1/(r_j-1)} \Big) \right) \right)
\end{aligned}$$

[7] Een reëelwaardige functie f wordt convex genoemd als voor willekeurige x, y uit het domein van f en voor elke $t \in [0,1]$ geldt dat $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{(vi)}}{=} \prod_{\sigma \in S} \left(\left(\prod_{i=1}^{n} r_i \right) \left(\prod_{j=1}^{n} r_j!^{(n-r_j)/r_j} (r_j - 1)!^{(r_j-1)/(r_j-1)} \right) \right) \\
&\overset{\text{(vii)}}{=} \prod_{\sigma \in S} \left(\prod_{i=1}^{n} r_i!^{n/r_i} \right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} r_i!^{1/r_i} \right)^{n \operatorname{per} A} .
\end{aligned}
$$

De verklaring van de niet-triviale stappen luidt:

(i) herformulering met behulp van Laplace;

(ii) toepassing van Lemma 2.5.12, waarbij r_i het aantal k's voorstelt waarvoor $a_{ik} = 1$;

(iii) het aantal factoren r_i langs beide kanten van de vergelijking is gelijk aan per A; het aantal factoren per $A(i|k)$ in het linkerlid is gelijk aan per $A(i|k)$ als $a_{ik} = 1$ en 0 als $a_{ik} = 0$, terwijl het aantal factoren per $A(i|k)$ in het rechterlid gelijk is aan het aantal permutaties $\sigma \in S$ waarvoor $\sigma(i) = k$, wat eveneens neerkomt op per $A(i|k)$ als $a_{ik} = 1$ en op 0 anders;

(iv) toepassing van de inductiehypothese op elke matrix $A(i|k)$;

(v) verwisseling van de volgorde van vermenigvuldiging;

(vi) voor vaste σ en j is het aantal i's waarvoor $i \neq j$ en $a_{j,\sigma(i)} = 0$ duidelijk gelijk aan $n - r_i$, terwijl het aantal i's waarvoor $i \neq j$ en $a_{j,\sigma(i)} = 1$ gelijk is aan $r_j - 1$ (juist omwille van $a_{j,\sigma(i)} = 1$ voor vaste σ en j);

(vii) factoren samennemen en herschrijven. □

Opmerking 2.5.14. De bovengrens in voorgaande stelling is niet geldig voor willekeurige matrices met niet-negatieve gehele getallen als elementen. Een familie van tegenvoorbeelden wordt gegeven door

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{N} > 1 \right\},
$$

aangezien voor alle $k = 2, 3, 4, \ldots$ geldt:

$$
\operatorname{per} \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = k > (k!)^{1/k} \cdot 1 = \prod_{i=1}^{2} r_i!^{1/r_i}.
$$

2.5.4 Ondergrenzen voor permanenten van binaire matrices

We zullen in deze sectie vervolgens op zoek gaan naar ondergrenzen voor permanenten van voornamelijk niet-negatieve vierkante matrices en in het bijzonder voor binaire matrices, gebaseerd op [39]. We zullen in een volgend hoofdstuk namelijk hoofdzakelijk geïnteresseerd zijn in permanenten van dubbelstochastische matrices, die zoals we reeds weten een deelverzameling vormen van de niet-negatieve matrices.

Stelling 2.5.15. *Zij A een binaire matrix van orde n met minstens t 1'en in elke rij en veronderstel dat* per $A > 0$. *Dan geldt dat* per $A \geq t!$.

Bewijs. We gebuiken inductie op n. Voor $n = 1$ moet $A = (1)$ wegens $\operatorname{per} A > 0$. Er volgt dan direct dat $\operatorname{per} A = 1 = 1!$. Veronderstel nu dat $n > 1$ en dat de bewering geldt voor alle matrices met orde kleiner dan n. Aangezien $\operatorname{per} A > 0$ en in het bijzonder ook $\operatorname{per} A[\omega_1, \ldots, \omega_k|1, \ldots, n] > 0$ voor elke $k = 1, \ldots, n$ en met $\omega \in Q_{k,n}$, halen we uit Gevolg 2.5.4 dat de matrix $A[\omega_1, \ldots, \omega_k|1, \ldots, n]$ minstens k niet-nul-kolommen moet bevatten. Anders zou er immers een $s \times (n - s + 1)$-nul-deelmatrix van $A[\omega_1, \ldots, \omega_k|1, \ldots, n]$ bestaan, namelijk voor $s = k$. We beschouwen nu twee mogelijke gevallen.
Stel eerst dat voor een zekere $h = 1, \ldots, n-1$ de deelmatrix $A[\omega_1, \ldots, \omega_h|1, \ldots, n]$, met $\omega \in Q_{h,n}$, precies h niet-nul-kolommen bevat. Met behulp van permutatiematrices P en Q kunnen we A dus in de volgende vorm krijgen:

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline C & D \end{array}\right),$$

waarbij B een vierkante binaire matrix van orde h voorstelt. In elk van de eerste h rijen van PAQ moeten de t 1'en bevat zijn in B, waardoor elke rij van B minstens t 1'en bezit. Uit

$$\operatorname{per} A = \operatorname{per} PAQ = \operatorname{per} B \operatorname{per} D > 0$$

volgt daarnaast dat $\operatorname{per} B > 0$ en $\operatorname{per} D > 0$. We kunnen dus de inductiehypothese toepassen op B en vinden dat $\operatorname{per} B \geq t!$. Er geldt nu dat

$$\operatorname{per} A = \operatorname{per} B \operatorname{per} D \geq t! \operatorname{per} D \geq t!,$$

waarbij de laatste ongelijkheid volgt uit $\operatorname{per} D > 0$.
We beschouwen nu het tweede geval. Als A niet in bovenstaande vorm gebracht kan worden, dan bevat elke $h \times n$-deelmatrix van A, voor elke $1 \leq h \leq n - 1$, minstens $h + 1$ niet-nul-kolommen. In het bijzonder bevat elke $h \times (n - 1)$-deelmatrix van A minstens h niet-nul-kolommen, dus bezit A geen $h \times (n + h - 1)$-nul-deelmatrix, waaruit wegens de stelling van Frobenius-König volgt dat $\operatorname{per} A(1|j) > 0$ voor alle j $= 1, \ldots, n$. Verder weten we, omdat elke rij van A minstens t 1'en bevat, dat elke rij van $A(1|j)$ minstens $t - 1$ moeten bevatten. De voorwaarden zijn dus voldaan om de inductiehypothese te kunnen toepassen op $A(1|j)$: we verkrijgen dat

$$\operatorname{per} A(1|j) \geq (t - 1)!.$$

Door de permanent van A te ontwikkelen met behulp van de formule van Laplace vinden we uiteindelijk dat

$$\operatorname{per} A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \operatorname{per} A(1|j) \geq \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t - 1)! = (t - 1)! \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \geq t!,$$

waarbij de laatste ongelijkheid geldt omdat elke rij van A en in het bijzonder ook de eerste rij minstens t 1'en bevat. $\square$

De veronderstelling dat de permanent van de binaire matrix in bovenstaande stelling strikt positief moet zijn, is onontbeerlijk. Een andere ondergrens, in 1966 aangereikt door de Amerikanen W. B. Jurkat en H. J. Ryser, blijkt geldig voor willekeurige binaire matrices. We formuleren en staven deze ongelijkheid na de invoering van een zogenaamde maximale matrix, die in het bewijs zal opduiken (zie [39, pp. 53-56]).

Definitie 2.5.16. Zij $\alpha := (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ een reëel n-tuple. Noteer met $\alpha^* := (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)$ het n-tuple verkregen door α te herschikken in een niet-stijgende volgorde $a_1^* \geq a_2^* \geq \ldots \geq a_n^*$ en noteer met $\alpha' := (a_1', a_2', \ldots, a_n')$ het n-tuple verkregen door α te herschikken in een niet-dalende volgorde $a_1' \leq a_2' \leq \ldots \leq a_n'$. Zij A een vierkante binaire matrix van orde n met rijsommen $r_1, \ldots, r_n$. Dan is de **maximale matrix** corresponderend met A, genoteerd als $A_{\max}$, de binaire matrix waarin de eerste r_i^* elementen in de i-de rij gelijk zijn aan 1 en de andere elementen aan 0, waarbij $i = 1, \ldots, n$.

Voorbeeld 2.5.17. Beschouw volgende vierkante $(0,1)$-matrix van orde 4:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We zien dat $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 1$ en $r_4 = 2$, dus $r_2 \geq r_1 = r_4 \geq r_3$.
Dan wordt r^* gegeven door $(r_2, r_1, r_4, r_3) = (r_2, r_4, r_1, r_3) = (3, 2, 2, 1)$ en vinden we dat

$$A_{\max} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stelling 2.5.18. *Zij A een binaire matrix van orde n met rijsommen $r_1, \ldots, r_n$. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^{n} \{r_i + i - n\},$$

waarbij $\{r_i + 1 - n\} = \max(0, r_i + 1 - n)$. Als $\operatorname{per} A \neq 0$, dan geldt de gelijkheid als en slechts als er een permutatiematrix P bestaat zodanig dat $AP = A_{max}$.

Bewijs. Als $r_n = 0$, valt er niets te bewijzen. We beschouwen dus enkel het geval waarin $r_n \neq 0$. Zonder de algemeenheid te schaden (de permanent is immers invariant onder permutaties van kolommen) kunnen we dan aannemen dat $a_{nj} = 1$, voor alle $j = 1, \ldots, n$. We leveren nu het bewijs met inductie op n. Stel $n = 1$ voor de inductiebasis, dan doen zich twee gevallen voor: $\operatorname{per}(0) = 0 = 0 + 1 - 1$ of $\operatorname{per}(1) = 1 = 1 + 1 - 1$. Veronderstel nu dat de stelling bewezen is voor vierkante matrices met orde kleiner dan n. Door het achtereenvolgens toepassen van ontwikkeling naar de laatste rij, de inductiehypothese en het feit dat voor alle $i, j = 1, \ldots, n$ geldt dat $1 - a_{ij} \geq 0$, vinden we:

$$\operatorname{per} A = \sum_{j=1}^{r_n} \operatorname{per} A(n|j) \geq \sum_{j=1}^{r_n} \prod_{i=1}^{n-1} \{(r_i - a_{ij}) + i - (n-1)\} \geq \sum_{j=1}^{r_n} \prod_{i=1}^{n-1} \{r_i + i - n\}.$$

Door nu specifiek de gedaante van de laatste rij van A in rekening te brengen, besluiten we dat

$$\operatorname{per} A \geq r_n \prod_{i=1}^{n-1} \{r_i + i - n\} = \prod_{i=1}^{n} \{r_i + i - n\}.$$

Er rest ons nog de gevallen na te gaan waarin de afschatting een gelijkheid wordt.
Stel vooreerst dat $\operatorname{per} A = \prod_{i=1}^{n} \{r_i + i - n\}$, of nog: dat $\operatorname{per} A = \prod_{i=1}^{n} (r_i + i - n) > 0$,

waarvoor $a_{nj} = 1$ voor alle $j = 1, \ldots, r_n$ en $a_{nj} = 0$ voor alle $j = r_n + 1, \ldots, n$. In het bijzonder zijn in dit geval alle ongelijkheden in bovenstaand bewijs gelijkheden, dus moet ook $\operatorname{per} A = \sum_{j=1}^{r_n} \prod_{i=1}^{n-1} \{r_i + i - n\} > 0$. Hieruit volgt dat $a_{ij} = 1$ voor alle $i = 1, \ldots, n$ en $j = 1, \ldots, r_n$, of nog: dat alle elementen in de eerste r_n kolommen van A gelijk moeten zijn aan 1. We verkrijgen nu dat

$$0 < \operatorname{per} A = \sum_{j=1}^{r_n} a_{nj} \operatorname{per} A(n|j) = \sum_{j=1}^{r_n} \operatorname{per} A(n|j) = r_n \operatorname{per} A(n|1) = r_n \prod_{i=1}^{n-1} (r_i + i - n),$$

waarbij we in de gelijkheden achtereenvolgens hebben gebruikgemaakt van: ontwikkeling naar de laatste kolom van A; $a_{nj} = 1$ voor alle $j = 1, \ldots, r_n$ en $a_{nj} = 0$ voor alle $j = r_n + 1, \ldots, n$; $A(n|1) = \ldots = A(n|r_n)$; $\operatorname{per} A(n|1) > 0$ wegens de veronderstelling dat $r_n > 0$. Hieruit volgt dat

$$\operatorname{per} A(n|1) = \prod_{i=1}^{n-1} (r_i + i - n) = \prod_{i=1}^{n-1} ((r_i - 1) + i - (n-1)) > 0.$$

Uit de inductiehypothese besluiten we dat $A(n|1)Q = A(n|1)_{\max}$ voor een zekere permutatiematrix Q. Merk op dat de eerste r_n kolommen van $A(n|1)$ eigenlijk al voldoen aan de vorm van een maximale matrix, dus dat Q enkel de laatste r_n kolommen mogelijk permuteert. Verder geldt dat alle elementen in de eerste kolom van A gelijk zijn aan 1, alsook de eerste r_n elementen in de laatste rij van A, terwijl de andere elementen in die laatste rij gelijk zijn aan 0. We concluderen dat $AP = A_{\max}$ voor een geschikte permutatiematrix P.
Veronderstel omgekeerd dat er een permutatiematrix P bestaat zodat $AP = A_{\max}$, namelijk voor $P = I_n$. Als $r_n = 0$ valt er niets te bewijzen; veronderstel dus dat $r_n > 0$. Wegens de vorm van een maximale matrix volgt uit $A = A_{\max}$ dat $A(n|1) = \ldots = A(n|r_n)$. Door toepassing van dezelfde stappen als daarnet, vinden we dat

$$\operatorname{per} A = \sum_{j=1}^{r_n} a_{nj} \operatorname{per} A(n|j) = \sum_{j=1}^{r_n} \operatorname{per} A(n|j) = r_n \operatorname{per} A(n|1) = r_n \prod_{i=1}^{n-1} \{(r_i - 1) + i - (n-1)\},$$

waaruit volgt dat $\operatorname{per} A = \prod_{i=1}^{n} \{r_i + i - n\}$. □

Deze ondergrens van Jurkat en Ryser blijkt een nogal ruime afschatting te zijn.

Voorbeeld 2.5.19. Beschouw opnieuw de vierkante binaire matrix A van orde 4:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We berekenen $\operatorname{per} A$ bijvoorbeeld door achtereenvolgens te ontwikkelen naar de tweede kolom van A en naar de tweede rij van $A(1|2)$, waardoor $\operatorname{per} A$ zich herleidt tot $\operatorname{per} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 2$.
De ondergrens voor deze permanent wordt volgens Stelling 2.5.18 gegeven door 0, aangezien voor $i = 1$ en $i = 3$ de rijsom in de i-de rij respectievelijk kleiner is dan en gelijk aan $4 - i$.

Merk algemener op dat de afschatting zich herleidt tot de triviale uitspraak dat $\operatorname{per} A \geq 0$ zodra de i-de rij van een binaire $n \times n$-matrix A minstens i nullen bevat, voor een zekere

$i \in \{1, \ldots, n\}$. Henryk Minc vond echter een verbetering voor de bovengrens, gebaseerd op de interessante observatie dat de permanent beter benaderd zou kunnen worden als de rijen van de beschouwde matrix zodanig gepermuteerd zijn dat de rijsommen in niet-stijgende volgorde staan. Dit inzicht wordt rigoreus gemaakt door de volgende ongelijkheden (zie [39, pp. 56-57]). Het bewijs van het herschikkingslemma laten we omwille van techniciteiten achterwege.

Lemma 2.5.20 (Herschikkingslemma). *Zij $a = (a_1, \ldots, a_n)$ en $b = (b_1, \ldots, b_n)$ reële n-tuples, met $a_i + b_i \geq 0$, voor alle $i = 1, \ldots, n$. Dan geldt:*

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i) \leq \prod_{i=1}^{n}(a_i^* + b_i'),$$

waarbij $\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \prod_{i=1}^{n}(a_i^* + b_i') \neq 0$ als en slechts als $a + b$ een herschikking is van $a^* + b'$.

Stelling 2.5.21. *Zij $r_1, \ldots, r_n \in \{1, \ldots, n\}$. Dan geldt:*

$$\prod_{i=1}^{n}\{r_i^* + i - n\} \geq \prod_{i=1}^{n}\{r_i + i - n\},$$

met gelijkheid als en slechts als ofwel het linkerlid gelijk is aan 0, ofwel $r_i^* = r_i$ voor alle $i = 1, \ldots, n$.

Bewijs. Voor $\prod_{i=1}^{n}\{r_i^* + i - n\} > 0$ moet gelden dat $r_i + i - n > 0$, voor alle $i = 1, \ldots, n$. Er is nu voldaan aan het herschikkingslemma met $a_i := r_i$ en $b_i := i - n$. (Merk hierbij op dat $(b_1, \ldots, b_n)$ inderdaad al in niet-dalende (zelfs stijgende) volgorde staat.)
Als de ongelijkheid in de stelling in het bijzonder een gelijkheid voorstelt, volgt onmiddellijk dat $r_i^* = r_i$ voor alle $i = 1, \ldots, n$ of dat een van de factoren in het linkerlid gelijk is aan 0. Als omgekeerd geldt dat $r_i^* = r_i$ voor alle $i = 1, \ldots, n$, volgt de gelijkheid ook triviaal. Veronderstel nu dat het linkerlid gelijk is aan 0. Dan moet $\{r_i^* + i - n\} = 0$ voor een zekere $i \in \{1, \ldots, n\}$, dus moet $r_i^* + i - n \leq 0$ voor een zekere $i \in \{1, \ldots, n\}$. We wensen aan te tonen dat er een $k \in \{1, \ldots, i\}$ bestaat waarvoor $r_k + k - n \leq 0$. Als $r_i + i - n > 0$, dan moet $r_i > r_i^*$ en moet er per definitie van r^* een $k \in \{1, \ldots, i-1\}$ bestaan zodanig dat $r_k \leq r_i^*$. Er volgt nu dat $r_k + i - n \leq 0$ en omdat $k < i$ kunnen we zelfs besluiten dat $r_k + k - n < 0$. Hieruit volgt dat $\{r_k + i - n\} = 0$ en dat dus ook het rechterlid van de ongelijkheid in de stelling gelijk is aan 0. In het bijzonder geldt dus gelijkheid. ☐

Gevolg 2.5.22. *Zij A een binaire matrix van orde n met rijsommen $r_1, \ldots, r_n$. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^{n}\{r_i^* + i - n\}.$$

Bewijs. Volgt direct uit Stelling 2.5.18 en Stelling 2.5.21. ☐

Voorbeeld 2.5.23. We hernemen opnieuw de binaire matrix A uit Voorbeeld 2.5.19, waarvoor we reeds berekenden dat $\operatorname{per} A = 2$. De ondergrens gebaseerd op het voorgaande gevolg wordt nu gegeven door $\prod_{i=1}^{n}\{r_i^* + i - n\} = (3+1-4)(2+2-4)(2+3-4)(1+4-4) = 0$, wat geen verbetering oplevert ten opzichte van de ondergrens uit Stelling 2.5.18.
Voor een $n \times n$-matrix waarbij voor alle $i = 1, \ldots, n$ geldt dat $r_i^* > n - i$ terwijl voor een zekere

i geldt dat $r_i = n - i$, werpt deze nieuwe ondergrens wel vruchten af. Beschouw ter illustratie de binaire 3×3-matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

We vinden dat per $B = 2, \prod_{i=1}^{3}\{r_i + i - n\} = 0 \cdot 2 \cdot 2 = 0$ en $\prod_{i=1}^{3}\{r_i^* + i - n\} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$.

2.5.5 Ondergrenzen voor positief semi-definiete hermitische matrices

Alvorens we tot een ondergrens voor de permanent van een positief semi-definiete hermitische matrix komen en bijhorend bewijs dat een mooie illustratie is van de interpretatie van de permanent als inwendig product, brengen we eerst in herinnering wat een Gram matrix is.

Definitie 2.5.24. Een **Gram matrix** $A = (a_{ij})$ van orde n van een verzameling vectoren $x_1, \ldots, x_n$ in een zekere inproductruimte V wordt gegeven door de hermitische matrix van inproducten, met andere woorden: $a_{ij} = (x_i, x_j)$ voor alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Lemma 2.5.25. *Een positief semi-definiete hermitische matrix is een Gram matrix.*

Bewijs. Elke positief semi-definiete hermitische matrix A kan ten opzichte van het standaard inproduct worden gefactoriseerd als $A = B\overline{B}^T$ voor een zekere[8] vierkante matrix B. Door de kolommen van B te beschouwen als de vectoren x_i, volgt dat A een Gram matrix is. □

Een andere hulpstelling, die vrij rechtstreeks uit de beschouwingen omtrent de interpretatie van de permanent als inproduct volgt (zie [39, pp. 23-24]), zal straks dienst doen om aan te tonen wanneer de ondergrens samenvalt met de permanent van de positief semi-definiete hermitische matrix zelf. We herinneren de lezer aan Definitie 2.4.14 bij dit lemma.

Lemma 2.5.26. *Zij V een inproductruimte en zij $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in V$.*

(i) *Er geldt: $x_1 * \ldots * x_m = 0$ als en slechts als $x_i = 0$ voor een zekere $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

(ii) *Zij $x_i \neq 0$ en $y_i \neq 0$, voor alle $i = 1, \ldots, m$. Dan geldt: $x_1 * \ldots * x_m = y_1 * \ldots * y_m$ als en slechts als $x_i = k_i y_{\sigma(i)}$, voor alle $i = 1, \ldots, m$, waarbij $\sigma \in S_m$ en $k_1, \ldots, k_m$ scalairen zijn waarvoor $k_1 \cdots k_m = 1$.*

Bewijs. (i) De implicatie van rechts naar links geldt triviaal. Veronderstel omgekeerd dat $x_1 * \ldots * x_m = 0$, dus $T_m x_1 \otimes \ldots \otimes x_m = 0$. Voor een willekeurige vector $z \in V$ geldt dan, met toepassing van eigenschappen uit Lemma 2.4.16, dat

$$\begin{aligned} 0 = (T_m x_1 \otimes \ldots \otimes x_m, z \otimes \ldots \otimes z) &= (x_1 \otimes \ldots \otimes x_m, T_m z \otimes \ldots \otimes z) \\ &= (x_1 \otimes \ldots \otimes x_m, z \otimes \ldots \otimes z) \\ &= \prod_{i=1}^{m} (x_i, z). \end{aligned}$$

We wensen nu aan te tonen dat $x_i = 0$. Veronderstel hiertoe dat $x_i \neq 0$, voor alle $i = 1, \ldots, m$. Dan zou $\dim\langle x_i \rangle^{\perp} = n - 1$ voor $i = 1, \ldots, m$ en dus $\cup_{i=1}^{m} \langle x_i \rangle^{\perp} \neq V$. Hieruit zou volgen dat we een $z \in V$ kunnen vinden waarvoor $z \notin \cup_{i=1}^{m} \langle x_i \rangle^{\perp}$. We bekomen dan $\prod_{i=1}^{m}(x_i, z) \neq 0$, een strijdigheid.

[8] Uit de Cholesky-decompositie van een positief semi-definiete hermitische matrix vinden we meer bepaald dat B een benedendriehoeksmatrix is.

(ii) De implicatie van rechts naar links is triviaal waar. Veronderstel dus dat $x_1 * \ldots * x_m = y_1 * \ldots * y_m$. Analoog aan het bewijs van de vorige uitspraak vinden we dat voor een willekeurige $z \in V$ moet gelden:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{m}(x_i, z) &= (x_1 \otimes \ldots \otimes x_m, z \otimes \ldots \otimes z) = (x_1 \otimes \ldots \otimes x_m, T_m z \otimes \ldots \otimes z)\\ &= (T_m x_1 \otimes \ldots \otimes x_m, z \otimes \ldots \otimes z) = (x_1 * \ldots * x_m, z \otimes \ldots \otimes z)\\ &= (y_1 * \ldots * y_m, z \otimes \ldots \otimes z) = (T_m y_1 \otimes \ldots \otimes y_m, z \otimes \ldots \otimes z)\\ &= (y_1 \otimes \ldots \otimes y_m, T_m z \otimes \ldots \otimes z) = (y_1 \otimes \ldots \otimes y_m, z \otimes \ldots \otimes z) = \prod_{i=1}^{m}(y_i, z).\end{aligned}$$

Zij nu $z \in \langle x_1 \rangle^{\perp}$ en zij $y_i = a_i + b_i$, met $a_i \in \langle x_1 \rangle$ en $b_i \in \langle x_1 \rangle^{\perp}$. Dan geldt

$$0 = \prod_{i=1}^{m}(y_i, z) = \prod_{i=1}^{m}(b_i, z),$$

dus moet wegens het eerste statement van dit lemma $b_i = 0$ voor een zekere i, zeg zonder verlies van algemeenheid voor $i = 1$. Dan is $y_1 = a_1 = k_1 x_1$ voor een zekere scalair k_1 en kunnen we dus schrijven dat

$$(x_1, z)\left(\prod_{i=2}^{m}(x_i, z) - k_1 \prod_{i=2}^{m}(y_i, z)\right) = 0$$

voor alle $z \in V$. Omdat $x_1 \neq 0$ verondersteld werd, vinden we dat

$$\prod_{i=2}^{m}(x_i, z) = k_1 \prod_{i=2}^{m}(y_i, z) = (k_1 y_2, z)(y_3, z) \cdots (y_m, z)$$

voor alle $z \in V$. Door toepassing van inductie op m voltooien we het bewijs. □

We komen nu tot de eigenlijke afschatting, die in 1965 door Marcus en Minc werd geformuleerd en bewezen (zie [35]).

Stelling 2.5.27. *Zij $A = (a_{ij})$ een positief semi-definiete hermitische $n \times n$-matrix en zij $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Als $r := \sum_{i=1}^{n} r_i \neq 0$, dan geldt:*

$$\operatorname{per} A \geq \frac{n!}{r^n} \prod_{i=1}^{n} |r_i|^2,$$

met gelijkheid als en slechts als A een nulrij bezit of $\operatorname{rk}(A) = 1$.

Bewijs. Uit Lemma 2.5.25 volgt dat A een Gram matrix is gebaseerd op bepaalde vectoren $x_1, \ldots, x_n$ in V, dus er geldt dat $a_{ij} = (x_i, x_j)$ voor alle $i, j = 1, \ldots, n$. Uit Stelling 2.4.17 en de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz toegepast op het inproduct in $V^{(m)}$ (zie Definitie 2.4.12) vinden we:

$$\frac{1}{n!} \operatorname{per} A = (x_1 * \ldots * x_n, x_1 * \ldots * x_n) \geq \left|(x_1 * \ldots * x_n, \frac{u}{\|u\|})\right|^2, \tag{2.5.3}$$

voor elke niet-nulvector u in $V^{(m)}$. Zij $v = \sum_{i=1}^{n} x_i$ zodat

$$\|v\|^2 = (v, v) = \sum_{i,j=1}^{n}(x_i, x_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} = r.$$

Merk op dat $v \neq 0$, want anders zou $r = 0$, in strijd met de veronderstelling. Stel nu $u = v * \ldots * v$ (bestaande uit n factoren). Door opnieuw gebruik te maken van Stelling 2.4.17, volgt er dat

$$\|u\|^2 = (v * \ldots * v, v * \ldots * v) = \frac{1}{n!} \operatorname{per} B,$$

waarbij $B = (b_{ij})$, met $b_{ij} = (v, v) = r$, voor alle $i, j = 1, \ldots, n$. We vinden nu per definitie van de permanent dat $\|u\|^2 = r^n$, waaruit samen met (2.5.3) volgt dat

$$\frac{1}{n!} \operatorname{per} A \geq \frac{|(x_1 * \ldots * x_n, v * \ldots * v)|^2}{r^n} = \frac{\left|\frac{1}{n!} \operatorname{per}((x_i, v))\right|^2}{r^n}.$$

Daarnaast gelden volgende gelijkheden:

$$(x_i, v) = (x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j) = \sum_{j=1}^{n} (x_i, x_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = r_i,$$

waaruit we halen dat

$$\operatorname{per}((x_i, v)) = \operatorname{per}(r_i) = n! \prod_{i=1}^{n} r_i.$$

Alles tesamen besluiten we:

$$\frac{1}{n!} \operatorname{per} A \geq \frac{1}{r^n} \prod_{i=1}^{n} |r_i|^2,$$

wat de gestelde ongelijkheid oplevert.
Als de gelijkheid geldt, moet de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz in het bijzonder ook een gelijkheid zijn en dus moeten $x_1 * \ldots * x_n$ en $v * \ldots * v$ lineair afhankelijk zijn. Omdat $v \neq 0$ kunnen we de voorgaande hulpstelling toepassen om te vinden dat ofwel $x_i = 0$ voor een zekere $i \in \{1, \ldots, n\}$, ofwel $x_i = k_i v$ voor bepaalde niet-nul scalairen k_i, voor alle $i = 1, \ldots, n$. In het eerste geval heeft $A = (a_{ij}) = ((x_i, x_j))$ een nulrij, in het tweede geval is de rang van A gelijk aan 1.
Veronderstel omgekeerd dat A een nulrij heeft. Dan volgt onmiddellijk dat $\operatorname{per} A = 0 = \prod_{i=1}^{n} |r_i|$. Als $\operatorname{rk}(A) = 1$, dan kunnen we de hermitische matrix A van orde n ontbinden als $\mathbf{x}\overline{\mathbf{y}}^T$ voor zekere vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ van lengte n. Omdat A bovendien positief semi-definiet is, kunnen we schrijven dat $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ voor een zekere positieve scalair λ. Neem nu de vector $\mathbf{c} = \sqrt{\lambda}\mathbf{y}$ en we vinden dat $\mathbf{x}\overline{\mathbf{y}}^T = \mathbf{c}\overline{\mathbf{c}}^T$. Noteren we $\mathbf{c} = (c_1 \cdots c_n)^T$, bekomen we dat $a_{ij} = c_i \overline{c_j}$ voor alle $i, j = 1, \ldots, n$.
We kunnen dus schrijven:

$$r_i = c_i \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}.$$

Dan volgt ook dat

$$\prod_{i=1}^{n} |r_i|^2 = \prod_{i=1}^{n} \left(|c_i|^2 \left| \sum_{j=1}^{n} c_j \right|^2 \right) = \prod_{i=1}^{n} |c_i|^2 \left| \sum_{j=1}^{n} c_j \right|^{2n}$$

en

$$r^n = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \right)^n = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} \right) = \left| \sum_{j=1}^{n} c_j \right|^{2n}.$$

Alles tesamen besluiten we dat

$$\frac{n!}{r^n}\prod_{i=1}^{n}|r_i|^2 = n!\prod_{i=1}^{n}|c_i|^2 = \operatorname{per} A,$$

waarbij de laatste stap direct volgt uit $a_{ij} = c_i\overline{c_j}$ voor alle $i, j = 1, \ldots, n$. $\square$

Gevolg 2.5.28. *Zij $A \in \Omega_n$ een positief semi-definiete symmetrische matrix. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A \geq \frac{n!}{n^n},$$

met gelijkheid als en slechts als $A = J_n$.

Bewijs. De gestelde begrenzing volgt direct uit de voorgaande stelling, aangezien voor $A \in \Omega_n$ geldt dat $r_i = 1$ voor alle $i = 1, \ldots, n$ en $r = \sum_{i=1}^{n} r_i = n$. $\square$

Een andere interessante ondergrens voor een positief semi-definiete hermitische matrix wordt gegeven door de determinant van deze matrix, zoals eerder aangehaald met (2.5.1). Voor we tot het bewijs van deze uitspraak komen, halen we eerst enkele andere ongelijkheden aan, die ook mooi in het kader van deze sectie passen en bovendien vaak op zichzelf ook zeer relevant zijn. In het bewijs van een eerste stelling in dit rijtje, steunende op [34], maken we gebruik van de interpretatie van een permanent als inwendig product in $V_{(m)}$. Noteer hierbij $A(i) := A(i|i)$ voor een willekeurige matrix A.

Stelling 2.5.29. *Zij A een vierkante positief semi-definiete matrix van orde $m + 1$. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A \geq a_{11} \operatorname{per} A(1),$$

met gelijkheid als en slechts als A een nulrij heeft of $A = a_{11}\dot{+}A(1)$, dus A geschreven kan worden als directe som van a_{11} en $A(1)$.

Bewijs. We weten reeds dat voor willekeurige vectoren $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in V$, met V een m-dimensionale inproductruimte, geldt voor alle $i, j = 1, \ldots, m$:

$$(x_1 * \ldots * x_m, y_1 * \ldots * y_m) = \frac{1}{m!}\operatorname{per}((x_i, y_j)).$$

Als $e_1, \ldots, e_m$ een orthonormale basis is in V, dan beweren we dat $\sqrt{m!/\mu(\omega)}\ e_\omega$, met $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in G_{m,n}$, een orthonormale basis in $V_{(m)}$, bestaande uit n^m elementen en met $e_\omega := e_{\omega_1} * \ldots * e_{\omega_m}$. We gaan na dat het inproduct van twee identieke basiselementen in $V_{(m)}$ inderdaad 1 oplevert:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{\frac{m!}{\mu(\omega)}}\ e_\omega, \sqrt{\frac{m!}{\mu(\omega)}}\ e_\omega\right) &= \frac{m!}{\mu(\omega)}(e_{\omega_1} * \ldots * e_{\omega_m}, e_{\omega_1} * \ldots * e_{\omega_m}) \\
&= \frac{1}{\mu(\omega)}\operatorname{per}((e_{\omega_i}, e_{\omega_j})) \\
&= \frac{1}{\mu(\omega)}\sum_{\sigma \in S_m}\prod_{i=1}^{m}(e_{\omega_i}, e_{\omega_{\sigma(i)}}) \\
&= \frac{1}{\mu(\omega)}\left(\sum_{\sigma \in S_m}\prod_{\substack{i=1,\ldots,m \\ \omega_i \neq \omega_{\sigma(i)}}}(e_{\omega_i}, e_{\omega_{\sigma(i)}}) + \sum_{\sigma \in S_m}\prod_{\substack{i=1,\ldots,m \\ \omega_i = \omega_{\sigma(i)}}}(e_{\omega_i}, e_{\omega_{\sigma(i)}})\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mu(\omega)}(0 + \mu(\omega)) = 1,$$

waarbij de voorlaatste stap volgt uit het feit dat $e_1, \ldots, e_m$ een orthonormale basis is in V. Met een analoge redenering wordt aangetoond dat het inproduct van twee verschillende basiselementen gelijk is aan nul, waarmee de bewering is gestaafd.
Definieer vervolgens een lineaire afbeelding S:

$$S : V_{(m)} \to V_{(m+1)} : x_1 * \ldots * x_m \mapsto e_1 * x_1 * \ldots * x_m.$$

Als $x_i \neq 0$ voor alle $i = 1, \ldots, m$, volgt nu uit de definitie van het symmetrisch product dat we volgend quotiënt, ook wel het Rayleigh quotiënt[9] genoemd, kunnen herschrijven:

$$\frac{(Sx_1 * \ldots * x_m, Sx_1 * \ldots * x_m)}{(x_1 * \ldots * x_m, x_1 * \ldots * x_m)} = \frac{(SS^* x_1 * \ldots * x_m, x_1 * \ldots * x_m)}{(x_1 * \ldots * x_m, x_1 * \ldots * x_m)} = \frac{1}{m+1} \frac{\operatorname{per} A}{\operatorname{per} A(1)},$$

waarbij $A = (a_{ij})$ de Gram matrix is (waarvan het bestaan verzekerd is door Lemma 2.5.25, want A wordt positief-definiet verondersteld) gebaseerd op de verzameling $\{e_1, x_1, \ldots, x_m\}$; met andere woorden:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (e_1, e_1), \\ a_{i+1,j+1} &= (x_i, x_j) \qquad\qquad \text{voor alle } i, j = 1, \ldots, m, \\ a_{1,j+1} &= \overline{a_{j+1,1}} = (e_1, x_j) \quad \text{voor alle } j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Noteer nu met $H := SS^*$ de hermitische matrix uit het Rayleigh quotiënt. We zijn geïnteresseerd in het bepalen van de minimale eigenwaarden en corresponderende eigenvectoren van H. Er kan worden nagegaan dat een matrixrepresentatie van H ten opzichte van de basis $\sqrt{m!/\mu(\omega)} \cdot e_\omega$, met $\omega \in G_{m,n}$, gegeven wordt door de diagonaalmatrix met als eigenwaarden van H:

$$\frac{\mu(1,\omega)}{\mu(\omega)} \frac{1}{m+1}$$

en corresponderende eigenvectoren e_ω. Omdat $\mu(\omega) \leq \mu(1,\omega)$, is bovenstaande uitdrukking naar onder begrensd door $1/(m+1)$ en geldt gelijkheid als en slechts als $\omega_1 > 1$, of nog: als en slechts als het symmetrisch product $x_1 * \ldots * x_m$ opgespannen wordt door e_ω, met $\omega_1 > 1$. We zullen tot slot bewijzen dat dit het geval is als en slechts als $(x_i, e_1) = 0$ voor alle $i = 1, \ldots, m$, dus $A = a_{11} \dot{+} A(1)$. Als $x_1 * \ldots * x_m$ opgespannen wordt door e_ω, met $\omega_1 > 1$, volgt omwille van de orthogonaliteit van de basis in $V^{(m)}$ dat $(x_i, e_1) = 0$ voor alle $i = 1, \ldots, m$. De omgekeerde implicatie geldt triviaal. $\square$

Gevolg 2.5.30 (Marcus' ongelijkheid)**.** *Zij $A = (a_{ij})$ een positief semi-definiete hermitische matrix van orde n. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^{n} a_{ii},$$

met gelijkheid als en slechts als A een nulrij heeft of A een diagonaalmatrix is.

[9] Vernoemd naar de Engelse natuurkundige en Nobelprijswinnaar John Rayleigh en gebruikt om uit geschatte eigenvectoren ook de eigenfrequenties te schatten van een conservatief natuurlijk systeem.

Bewijs. We bewijzen met inductie op n. Voor $n = 1$ geldt de bewering triviaal. Veronderstel dat de ongelijkheid bewezen is voor een positief semi-definiete hermitische matrix van orde hoogstens $n - 1$. We weten uit de voorgaande stelling al dat $a_{11} \operatorname{per} A(1) \leq \operatorname{per} A$. Toepassing van de inductiehypothese levert:

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \prod_{i=2}^{n} a_{ii} \leq \operatorname{per} A.$$

De gevallen waarin gelijkheid optreedt, volgen onmiddellijk. □

De bewijzen van de volgende stellingen zijn gebaseerd op [35, Section 3] en [39, pp. 24 e.v.].

Stelling 2.5.31 (Marcus-Newman). *Zij A een $m \times n$-matrix en B een $n \times m$-matrix. Dan geldt:*

$$|\operatorname{per} AB|^2 \leq \operatorname{per} A\overline{A}^T \ \operatorname{per} \overline{B}^T B,$$

met gelijkheid als en slechts als ofwel A een nulrij heeft, ofwel B een nulkolom heeft, ofwel $A = DPB^T$, waarbij D een diagonaalmatrix is en P een permutatiematrix.

Bewijs. Noteer met $A_{(i)} =: u_i$ de i-de rij van A en met $\overline{B^{(j)}} =: v_j$ de j-de kolom van $\overline{B}$, voor alle $i, j = 1, \ldots, m$. Per definitie van het symmetrisch product en wegens Stelling 2.4.17 kunnen we schrijven dat

$$\begin{aligned}
|(u_1 * \ldots * u_m, v_1 * \ldots * v_m)|^2 &= \frac{1}{(m!)^2} |\operatorname{per}((u_i, v_j))|^2, \\
\|u_1 * \ldots * u_m\|^2 &= \frac{1}{m!} \operatorname{per}((u_i, u_j)) \text{ en} \\
\|v_1 * \ldots * v_m\|^2 &= \frac{1}{m!} \operatorname{per}((v_i, v_j)).
\end{aligned}$$

De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz zegt ons dat

$$|(u_1 * \ldots * u_m, v_1 * \ldots * v_m)|^2 \leq \|u_1 * \ldots * u_m\|^2 \|v_1 * \ldots * v_m\|^2,$$

waaruit na invulling van bovenstaande herformuleringen de gezochte ongelijkheid volgt.
De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz is een gelijkheid als en slechts als de tensoren lineair afhankelijk zijn. Uit Lemma 2.5.26 volgt dat dit equivalent is met het feit dat ofwel een van de vectoren $u_1, \ldots, u_m$ nul is, ofwel een van de vectoren $v_1, \ldots, v_m$ nul is, ofwel $u_i = k_i v_{\sigma(i)}$ voor alle $i = 1, \ldots, m$, voor een zekere $\sigma \in S_m$ en voor bepaalde scalairen $k_1, \ldots, k_m$. Teruggekoppeld naar hoe u_i en v_j gedefinieerd werden in het begin van het bewijs, zijn deze uitspraken respectievelijk equivalent met het feit dat ofwel A een nulrij heeft, ofwel B een nulkolom heeft, ofwel $A = DP\overline{B}^T$, met $D = (d_{ij})$ een diagonaalmatrix (met $d_{ii} = k_i$ voor alle $i = 1, \ldots, n$) en P een permutatiematrix (die de permutatie σ representeert). □

Merk op dat de stelling van Marcus-Newman geen voorwaarden vereist over het positief semi-definiet zijn. Ook de volgende twee vrijwel direct bekomen ongelijkheden gelden in een algemenere context.

Gevolg 2.5.32. *Zij A een $n \times n$-matrix. Dan geldt:*

$$|\operatorname{per} A|^2 \leq \operatorname{per} A\overline{A}^T,$$

met gelijkheid als en slechts als ofwel A een nulrij heeft ofwel $A = DP$, waarbij D een diagonaalmatrix is en P een permutatiematrix.

Bewijs. Volgt onmiddellijk uit Stelling 2.5.31 met $B = I_n$ en uit het feit dat de permanentfunctie genormeerd is. $\square$

Gevolg 2.5.33. *Zij U een unitaire $n \times n$-matrix. Dan geldt:*

$$|\operatorname{per} U| \leq 1.$$

Bewijs. Volgt onmiddellijk uit Gevolg 2.5.32 en per definitie van een unitaire matrix. $\square$

Het bewijs van de stelling van Schur, waarmee we deze sectie over ondergrenzen van positief semi-definiete hermitische matrices besluiten, zal mooi gebruik maken van de daarnet bewezen stelling van Marcus-Newman.

Stelling 2.5.34 (Schur)**.** *Zij A een positief semi-definiete hermitische matrix van orde n. Dan geldt:*

$$\det A \leq \operatorname{per} A,$$

met gelijkheid als en slechts als A een diagonaalmatrix is of A een nulrij heeft.

Bewijs. Omdat A positief semi-definiet is, bestaat er wegens de Cholesky-decompositie een bovendriehoeksmatrix $L = (l_{ij})$ zodat $A = L\overline{L}^T$. Merk op dat $\operatorname{per} L = \det L = \prod_{i=1}^n l_{ii}$. Volgende gelijkheden zijn dus geldig:

$$\det A = \det L\overline{L}^T = \det L \det \overline{L}^T = \operatorname{per} L \;\operatorname{per} \overline{L}^T.$$

We kunnen dit resultaat afschatten met achtereenvolgens een eenvoudige observatie en het toepassen van Stelling 2.5.31:

$$\det A \leq |\operatorname{per} LI_n| \; |\operatorname{per} I_n\overline{L}^T| \leq \sqrt{\operatorname{per} L\overline{L}^T}\sqrt{\operatorname{per} L\overline{L}^T} = \operatorname{per} A.$$

De gevallen van gelijkheid gelden triviaal. $\square$

3 Vermoeden van Van der Waerden

3.1 Ontwikkelingen en opbouw

Wat is het minimum van de permanent in de verzameling van alle dubbelstochastische matrices? Deze vraag werd in 1926 door de Nederlandse wiskundige Bartel Leendert van der Waerden in [11] gesteld en werd een van de bekendste en meest onderzochte vragen in de theorie van permanenten. Het zorgde meer bepaald voor een heuse heropleving in studies omtrent de permanent, waarbij het antwoord op deze vraag pas ruim een halve eeuw later bevestigd werd. Het was namelijk in 1981 dat de wiskundigen G. P. Egorychev en D. I. Falikman er in slaagden om dit vermoeden te staven.[10]

Vermoeden 3.1.1 (Van der Waerden)**.** *Zij $A \in \Omega_n$ en $A \neq J_n$. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A > \operatorname{per} J_n.$$

Alvorens we ons zullen toespitsen op lemma's en stellingen van Egorychev en Falikman die leiden tot het gewenste resultaat, bekijken we eerst in detail enkele fundamentele stellingen die aan de basis van hun voortgezet werk liggen. Deze basis werd, zoals aangehaald in de historische achtergrond, door Marvin Marcus en Morris Newman in 1959 gelegd in een klassieke paper die volledig gewijd werd aan het vermoeden van Van der Waerden (zie [36]). Hun idee bestond erin om eigenschappen van matrices aan te tonen wiens permanenten minimaal zijn in Ω_n en dan te bewijzen dat enkel de matrix J_n aan deze eigenschappen zou voldoen. Hoewel Marcus en Newman er niet in slaagden om Vermoeden 3.1.1 te staven noch te weerleggen, kwamen ze wel tot enkele interessante inzichten en stellingen waarop andere wiskundigen later verder konden bouwen. We formuleren en bewijzen de belangrijkste van deze (hulp)stellingen, waarvoor we ons initieel laten leiden door [39, pp. 73 e.v.].

Definitie 3.1.2. Een dubbelstochastische vierkante matrix A van orde n die voldoet aan

$$\operatorname{per} A = \min_{S \in \Omega_n} \operatorname{per} S,$$

noemen we een **minimaliserende matrix**.

Uit Stelling 2.5.9 volgt direct dat de maximale waarde die de permanent van een dubbelstochastische matrix van orde n kan bereiken, gegeven wordt door elke permutatiematrix van orde n. In de lijn van Opmerking 2.5.8 komt dit overeen met de rand van Ω_n die voor moeilijkheden zorgt bij het vinden van de minimale permanent. De permutatiematrices in gedachten, lijkt het dus wenselijk om informatie te verstrekken over nulelementen in dubbelstochastische matrices. Volgend lemma en twee kleine doch interessante gevolgen, louter aangehaald in [51, Section 3] en hier in detail bewezen, blijken verderop dan ook nuttig.

Lemma 3.1.3. *Als $A \in \Omega_n$ een minimaliserende matrix is, dan is A niet te schrijven als directe som van een element van Ω_k en een element van Ω_{n-k}.*

Bewijs. Veronderstel dat de minimaliserende matrix $A = (a_{ij}) \in \Omega_n$ een directe som is van $P = (p_{ij}) \in \Omega_k$ en $Q = (q_{ij}) \in \Omega_{n-k}$. Uit Stelling 2.5.5 weten we dat $\operatorname{per} P > 0$ en $\operatorname{per} Q > 0$.

[10] Voor dit bewijs werden Egorychev en Falikman in 1982 bekroond met de *Fulkerson Prize*, die wordt uitgereikt voor buitengewone papers binnen de tak van de discrete wiskunde.

Uit Gevolg 2.5.6 halen we dat A een positieve diagonaal bezit; neem zonder de algemeenheid te schaden aan dat de hoofddiagonaal positief is (dit kunnen we immers verkrijgen door een herschikking van rijen/kolommen van A, wat de permanent invariant laat). We vervangen vervolgens in A het element p_{kk} door $p_{kk} - \epsilon$, q_{11} door $q_{11} - \epsilon$ en de nulelementen $a_{k,k+1}$ en $a_{k+1,k}$ door ϵ, voor een voldoende kleine $\epsilon > 0$ zodat de nieuw verkregen matrix, zeg A', opnieuw dubbelstochastisch is. We vinden dan dat

$$\operatorname{per} A' = \operatorname{per} A - \epsilon \operatorname{per} A(k|k) - \epsilon \operatorname{per} A(k+1|k+1) + O(\epsilon^2).$$

Aangezien $\operatorname{per} A(k|k)$ en $\operatorname{per} A(k+1|k+1)$ beiden positief zijn, zien we dat $\operatorname{per} A' < \operatorname{per} A$ voor ϵ voldoende klein. Dit is echter in strijd met de minimaliteit van A, waarmee het gestelde bewezen is. $\square$

Gevolg 3.1.4. *Als $A \in \Omega_n$ een minimaliserende matrix is, bezit elke rij van A minstens twee positieve elementen.*

Bewijs. Veronderstel dat A een dubbelstochastische minimaliserende matrix is van orde n met slechts een positief element in de i-de rij, zeg op positie a_{ij}, voor zekere $1 \leq i, j \leq n$. Omdat $A \in \Omega_n$, moet $a_{ij} = 1$. Bijgevolg moeten alle andere elementen in kolom j gelijk zijn aan nul, dus zou A geschreven kunnen worden als directe som van twee dubbelstochastische matrices. Dit is echter in strijd met Lemma 3.1.3 en besluit het bewijs. $\square$

Gevolg 3.1.5. *Als $A = (a_{ij}) \in \Omega_n$ een minimaliserende matrix is, bestaat er voor elk element a_{ij} een $\sigma \in S_n$ zodat $\sigma(i) = j$ en $a_{s,\sigma(s)} > 0$ voor alle $1 \leq s \leq n, s \neq i$.*

Bewijs. We bewijzen de uitspraak uit het ongerijmde. Zij $A = (a_{ij}) \in \Omega_n$ een minimaliserende matrix en beschouw zonder de algemeenheid te schaden a_{11}. In het bijzonder moet dan elke diagonaal van $A(1|1)$ een nulelement bevatten. Uit de stelling van Frobenius-König halen we dat de vierkante matrix $A(1|1)$ van orde $n-1$ een $s \times t$-deelmatrix bevat met $s+t = (n-1)+1 = n$. Als $s = 1$, is elk element van de k-de rij van $A(1|1)$ gelijk aan 0, voor een zekere $k, 2 \leq k \leq n$. Omdat $A \in \Omega_n$, volgt dan na verwisseling van de eerste met de k-de rij dat de minimaliserende matrix A te schrijven is als directe som van een element van Ω_1 en een element van Ω_{n-1}, in strijd met Lemma 3.1.3. Een analoge situatie, namelijk met betrekking tot de kolommen van A, doet zich voor als $t = 1$.
Als $2 \leq s \leq n-2$, dan kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat voor alle i en j waarvoor $t+1 \leq i \leq n$ en $s+1 \leq j \leq n$ een $s \times t$-nul-deelmatrix van $A(1|1)$ te vinden is. Omdat $(a_{ij})_{1 \leq i \leq t,\ s+1 \leq j \leq n}$ en $(a_{ij})_{t+1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq s}$ vierkante matrices zijn en $A \in \Omega_n$, is bijgevolg $(a_{ij})_{1 \leq i \leq t,\ 1 \leq j \leq s}$ ook een nulmatrix. De minimaliserende dubbelstochastische matrix A kan dus worden geschreven als de directe som van twee dubbelstochastische matrices, opnieuw strijdig met Lemma 3.1.3. De bewering volgt. $\square$

We komen tot enkele baanbrekende stellingen die Marcus en Newman in 1959 formuleerden (zie [36]) en de hierop volgende jaren als voornaamste vertrekpunten voor verder onderzoek bij menig wiskundige diende.

Het bewijs van een eerste stelling maakt gebruik van zogenaamde *Lagrangemultiplicatoren*: dit zijn hulpvariabelen die bij een optimaliseringsprobleem kunnen worden ingevoerd om zowel de formulering als de oplossing van het probleem sterk te vereenvoudigen (zie bijvoorbeeld [1]). Een standaard optimaliseringsprobleem onderhevig aan een voorwaarde is van de vorm:

maximaliseer (minimaliseer) de functie $f(x, y)$ onder de voorwaarde $g(x, y) = c$,

of anders geformuleerd: zoek het punt (x, y) dat op de kromme $g(x, y) = c$ ligt en waarvoor de functie f maximaal (minimaal) is. Als uit de voorwaarde niet kan worden afgeleid hoe de ene variabele afhankelijk is van de andere, kan het probleem herleid worden tot het maximaliseren (minimaliseren) van een nieuwe functie Λ, de zogenaamde *Lagrangefunctie*, waarbij een hulpvariabele λ, de *Lagrangemultiplicator*, in het spel komt:

$$\Lambda(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda\big(c - g(x, y)\big).$$

Voor een oplossing (x, y) van het oorspronkelijke probleem zal er steeds een λ bestaat waarvoor (x, y, λ) een evenwichtspunt is van de functie $\Lambda(x, y, \lambda)$, die we kunnen vinden door Λ partieel af te leiden naar x en y, beide uitdrukkingen gelijk te stellen aan 0 en de informatie uit deze vergelijkingen te substitueren in de voorwaarde $g(x, y) = c$. Merk op dat de partiële afgeleide van Λ naar λ gelijkstellen aan 0 juist deze voorwaarde geeft.

Stelling 3.1.6. *Zij $A = (a_{ij}) \in \Omega_n$ een minimaliserende matrix. Als $a_{hk} > 0$, dan geldt:*

$$\operatorname{per} A(h|k) = \operatorname{per} A.$$

Bewijs. Definieer

$$C(A) := \{X = (x_{ij}) \in \Omega_n \mid x_{ij} = 0 \text{ als } a_{ij} = 0\}.$$

Equivalent uitgedrukt wordt $C(A)$ gedefinieerd door de volgende voorwaarden:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad x_{ij} &\geq 0, \qquad \text{voor alle } i, j = 1, \ldots, n \text{ en} \\ x_{ij} &= 0, \qquad \text{voor alle } (i, j) \text{ waarvoor } a_{ij} = 0. \end{aligned}$$

Per definitie van een minimaliserende matrix is A een absoluut minimum voor de permanentfunctie over Ω_n, maar het is ook duidelijk dat A een relatief minimum is voor de permanentfunctie over $C(A)$. Het optimalisatieprobleem dat we aan onze beschouwingen kunnen linken, vraagt om de functie $\operatorname{per} X$ te minimaliseren onder de bovenstaande voorwaarden. Omdat de afhankelijkheid tussen alle variabelen x_{ij} niet kan worden afgeleid uit deze voorwaarden, voeren we Lagrangemultiplicatoren als nieuwe variabelen λ_i en μ_j in voor alle $i, j = 1, \ldots, n$ en stellen we de bijhorende Lagrangefunctie Λ op over $C(A)$:

$$\Lambda(X) = \operatorname{per} X - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} - 1 \right) - \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left(\sum_{k=1}^{n} x_{kj} - 1 \right).$$

Voor alle (i, j) waarvoor $a_{ij} \neq 0$ vinden we met differentiaalrekenen dat

$$\partial\Lambda(X)/\partial x_{ij} = \operatorname{per} X(i|j) - \lambda_i - \mu_j.$$

Omdat A een absoluut minimum voor de permanentfunctie over Ω_n voorstelt, volgt hieruit dat

$$\operatorname{per} A(i|j) = \lambda_i + \mu_j.$$

Door de permanent van A nu te ontwikkelen, verkrijgen we voor alle $i = 1, \dots, n$ dat

$$\operatorname{per} A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per} A(i|j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda_i + \mu_j) = \lambda_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu_j$$

en helemaal analoog vinden we voor alle $j = 1, \dots, n$:

$$\operatorname{per} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per} A(i|j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\lambda_i + \mu_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\lambda_i + \mu_j.$$

Stel nu $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_n)$ en $e := (1, \dots, 1)$. Uit de vorige twee uitdrukkingen volgt dat

$$\operatorname{per} A \cdot e = \lambda + A\mu, \tag{3.1.1}$$
$$\operatorname{per} A \cdot e = A^T\lambda + \mu. \tag{3.1.2}$$

Omdat $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, geldt dat $A^T e = e$. Bijgevolg vinden we na vermenigvuldiging van (3.1.1) met A^T dat

$$\operatorname{per} A \cdot e = A^T\lambda + A^T A\mu. \tag{3.1.3}$$

Door (3.1.2) af te trekken van (3.1.3) besluiten we dat $A^T A\mu = \mu$ en analoog vinden we dat $AA^T\lambda = \lambda$. We weten uit Gevolg 1.2.3 dat $A^T A$ en AA^T volledig niet-decomposeerbaar zijn en uit Gevolg 1.2.10 dat 1 een enkelvoudige eigenwaarde is van zowel $A^T A$ als AA^T. Dus λ en μ zijn veelvouden van e; stel $\lambda = ce$ en $\mu = de$ voor zekere $c, d \in \mathbb{R}$ en dan krijgen we voor alle (i, j) waarvoor $a_{ij} \neq 0$:

$$\operatorname{per} A(i|j) = \lambda_i + \mu_j = c + d.$$

Dit wetende, besluiten we dat

$$\operatorname{per} A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per} A(i|j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(c + d) = c + d = \operatorname{per} A(i|j). \qquad \square$$

Stelling 3.1.7. *Zij $A \in \Omega_n^*$ een minimaliserende matrix. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A = \operatorname{per} J_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Bewijs. Omdat A positief verondersteld wordt, volgt uit Stelling 3.1.6 dat $\operatorname{per} A(i|j) = \operatorname{per} A$ voor alle $i, j = 1, \dots, n$. Zij G de directe som van J_2 en I_{n-2}, dan vinden we dankzij de multilineariteit van de permanentfunctie dat

$$\operatorname{per} GA = \frac{1}{2} \operatorname{per} A + \frac{1}{4} \operatorname{per}(A_{(1)}, A_{(1)}, A_{(3)}, \dots, A_{(n)}) + \frac{1}{4} \operatorname{per}(A_{(2)}, A_{(2)}, A_{(3)}, \dots, A_{(n)}).$$

Door ontwikkeling naar de tweede rij en gebruik makend van $\operatorname{per} A(2|j) = \operatorname{per} A(1|j)$ voor alle $j = 1, \dots, n$, verkrijgen we:

$$\operatorname{per}(A_{(1)}, A_{(1)}, A_{(3)}, \dots, A_{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \operatorname{per} A(2|j) = \operatorname{per} A.$$

Analoog vinden we ook dat

$$\operatorname{per}(A_{(2)}, A_{(2)}, A_{(3)}, \ldots, A_{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \operatorname{per} A(2|j) = \operatorname{per} A.$$

Bijgevolg geldt:

$$\operatorname{per} GA = \operatorname{per} A.$$

Ook GA is een positieve minimaliserende $n \times n$-matrix en er geldt dat $\operatorname{per} GA(i|j) = \operatorname{per} A$ voor alle $i, j = 1, \ldots, n$.
Zij nu $P_1, P_2, \ldots, P_{n-2}$ permutatiematrices van orde n waarvoor voldaan is aan

$$\begin{aligned}
P_1 G P_1^T &= I_1 \dotplus J_2 \dotplus I_{n-3} \\
P_2 G P_2^T &= I_2 \dotplus J_2 \dotplus I_{n-4} \\
&\vdots \\
P_{n-3} G P_{n-3}^T &= I_{n-3} \dotplus J_2 \dotplus I_1 \\
P_{n-2} G P_{n-2}^T &= I_{n-2} \dotplus J_2.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat we de matrix M_n kunnen definiëren als:

$$\begin{aligned}
M_n &= P_{n-2} G P_{n-2}^T P_{n-3} G P_{n-3}^T \ldots P_2 G P_2^T P_1 G P_1^T G \\
&= (I_{n-2} \dotplus J_2)(I_{n-3} \dotplus J_2 \dotplus I_1) \ldots (I_2 \dotplus J_2 \dotplus I_{n-4})(I_1 \dotplus J_2 \dotplus I_{n-3})(J_2 \dotplus I_{n-2}) \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{n-2}} & & \ldots & & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{n-2}} & & \ldots & & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Merk op dat M_n een dubbelstochastische matrix is. Bovendien is M_n duidelijk volledig niet-decomposeerbaar en wegens Lemma 1.2.5 dus primitief. De eigenwaarde met maximale modulus van deze matrix is 1 en de moduli van de andere eigenwaarden zijn strikt kleiner dan 1 wegens Stelling 1.2.7. Beschouw dan

$$L_n := \lim_{k \to \infty} M_n^k.$$

De matrices M_n^k convergeren naar een dubbelstochastische matrix van rang 1, aangezien op de eigenwaarde met modulus 1 na alle eigenwaarden van M_n^k zullen convergeren naar 0. Omdat in een matrix van rang 1 alle rijen evenredig zijn en $L_n \in \Omega_n$, moet

$$L_n = J_n.$$

We hebben al aangetoond dat G vermenigvuldigd met een positieve minimaliserende matrix opnieuw een positieve minimaliserende matrix oplevert. Aangezien dit resultaat ongewijzigd blijft onder vermenigvuldiging met permutatiematrices, volgt dat ook $M_n A$ een positieve minimaliserende matrix is. Op analoge wijze kunnen we dan afleiden dat voor elke $k \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\operatorname{per} M_n^k A = \operatorname{per} A.$$

Hieruit volgt, samen met het continu zijn van de permanentfunctie:

$$\operatorname{per} A = \lim_{k\to\infty} \operatorname{per} M_n^k A = \operatorname{per}\left(\lim_{k\to\infty} M_n^k\right) A = \operatorname{per} J_n A = \operatorname{per} J_n = \frac{n!}{n^n},$$

wat het bewijs besluit. $\square$

Lemma 3.1.8. *Zij $A = (a_{ij}) \in \Omega_n$ voldoende dicht bij J_n, maar $A \neq J_n$. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A > \operatorname{per} J_n.$$

Bewijs. Stel $a_{st} := \min_{i,j}(a_{ij})$ en $\theta_0 := 1 - na_{st}$. Omdat $A \neq J_n$, is $\theta_0 > 0$ en kunnen we de matrix $B \in \Omega_n$ als volgt definiëren:

$$B := (b_{ij}) = \frac{1}{\theta_0}\left(A - (1-\theta_0)J_n\right).$$

Merk op dat er minstens een element van B gelijk is aan nul; er geldt per definitie van B namelijk al zeker dat $b_{st} = 0$. Definieer nu

$$L(A) := \{S \mid S = \theta B + (1-\theta)J_n, \text{ voor alle } \theta \in [0,1]\}.$$

Het is duidelijk dat $A = \theta_0 B + (1-\theta_0)J_n \in L(A)$. Definieer nu een functie f op $[0,1]$ als

$$f(\theta) := \operatorname{per}(\theta B + (1-\theta)J_n).$$

Beschouw in het bijzonder $\theta = \theta_0$. Toepassing van reeksontwikkeling (McLaurin) op f levert dan:

$$\begin{aligned}\operatorname{per} A = f(\theta_0) &= f(0) + \theta_0 f'(0) + \frac{1}{2}\theta_0^2 f''(0) + O(\theta_0^3)\\ &= \operatorname{per} J_n + \theta_0 f'(0) + \frac{1}{2}\theta_0^2 f''(0) + O(\theta_0^3).\end{aligned}$$

We beweren dat $f'(0) = 0$ en dat $f''(0) > 0$, waaruit het gestelde dan volgt voor voldoende kleine θ_0. Met differentiaalrekening vinden we hiertoe dat

$$f'(\theta) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(b_{ij} - \frac{1}{n}\right)\operatorname{per}((\theta B + (1-\theta)J_n)(i|j)).$$

Respectievelijk toepassen van de substitutie $\theta = 0$, Stelling 3.1.7 en het dubbelstochastische karakter van B in onderstaande gelijkheden staaft de eerste bewering:

$$f'(0) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(b_{ij} - \frac{1}{n}\right)\operatorname{per} J_n(i|j) = \left(\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\right)\sum_{i,j=1}^{n}\left(b_{ij} - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Er rest ons enkel nog aan te tonen dat $f''(0) > 0$. Door $f'(\theta)$ nogmaals af te leiden en opnieuw $\theta = 0$ te substitueren vinden we dat

$$f''(0) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(b_{ij} - \frac{1}{n}\right)\sum_{\substack{h\neq i\\ k\neq j}}\left(b_{hk} - \frac{1}{n}\right)\operatorname{per} J_n(i,h|j,k).$$

Omdat de som van de elementen in de i-de rij alsook de som van de elementen in de j-de kolom gelijk is aan 1 en het element b_{ij} in beide sommen voorkomt, kunnen we schrijven dat

$$\sum_{\substack{h\neq i\\ k\neq j}}\left(b_{hk} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(n - 2 + b_{ij} - \frac{(n-1)^2}{n}\right).$$

Met elementair rekenwerk vinden we dat $n-2-\frac{(n-1)^2}{n} = \frac{n^2-2n-n^2+2n-1}{n} = -\frac{1}{n}$, wat ons nu samen met toepassing van Stelling 3.1.7 toelaat om $f''(0)$ te herformuleren als

$$f''(0) = \frac{(n-2)!}{n^{n-2}} \sum_{i,j=1}^{n} \left(b_{ij} - \frac{1}{n} \right)^2.$$

Omdat voor minstens een koppel (i,j) geldt dat $b_{ij} = 0$, zal $\sum_{i,j} \left(b_{ij} - \frac{1}{n}\right)^2 \geq \frac{1}{n^2}$.
We kunnen dus besluiten dat

$$f''(0) \geq \frac{(n-2)!}{n^n} > 0,$$

want uit de veronderstelling dat $A \in \Omega_n$ en $A \neq J_n$ volgt dat n strikt groter moet zijn dan 1. $\square$

Hoewel het bestaan van een positieve minimaliserende matrix nog niet kon worden aangetoond door Marcus en Newman, formuleerden en bewezen ze op basis van bovenstaande stelling wel een uitspraak over de uniciteit van een positieve minimaliserende matrix.

Stelling 3.1.9. *Zij $A \in \Omega_n^*$ een minimaliserende matrix. Dan geldt: $A = J_n$.*

Bewijs. Zij M_n de matrix zoals gedefinieerd in het bewijs van Stelling 3.1 en beschouw de rij van matrices

$$A, M_nA, M_n^2A, M_n^3A, \ldots \quad . \tag{3.1.4}$$

We beweren dat voor $A \neq J_n$ alle termen in deze rij verschillend zijn van J_n. Veronderstel dus dat $A \neq J_n$ en $M_n^hA = J_n$ voor een zeker natuurlijk getal h. Zij s het kleinste natuurlijk getal waarvoor geldt dat $M_n^sA = J_n$ en stel $B := M_n^{s-1}A$. Dan vinden we dat $M_nB = M_n^sA = J_n$, dus alle rijen van M_nB zijn gelijk aan $\frac{1}{n}e$, met $e = (1, \ldots, 1)$. Gebruik makende van de concrete gedaante van M_n verkrijgen we volgende gelijkheden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}B_{(1)} + \frac{1}{2}B_{(2)} &= \frac{1}{4}B_{(1)} + \frac{1}{4}B_{(2)} + \frac{1}{2}B_{(3)} \\
&= \frac{1}{8}B_{(1)} + \frac{1}{8}B_{(2)} + \frac{1}{4}B_{(3)} + \frac{1}{2}B_{(4)} \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}B_{(1)} + \frac{1}{2^{n-1}}B_{(2)} + \frac{1}{2^{n-2}}B_{(3)} + \ldots + \frac{1}{2}B_{(n)} \\
&= \frac{1}{n}e.
\end{aligned}$$

De eerste gelijkheid kunnen we equivalent herschrijven als

$$\frac{1}{4}B_{(1)} + \frac{1}{4}B_{(2)} = \frac{1}{2}B_{(3)}, \text{ of nog: } \frac{1}{2}\left(B_{(1)} + B_{(2)}\right) = B_{(3)}.$$

Uiteindelijk impliceren al deze gelijkheden dat

$$\frac{1}{2}(B_{(1)} + B_{(2)}) = B_{(3)} = B_{(4)} = \ldots = B_{(n)} = \frac{1}{n}e. \tag{3.1.5}$$

Omdat A een positieve minimaliserende matrix is en we uit het bewijs van Stelling 3.1.7 reeds weten dat ook M_nA een positieve minimaliserende matrix is, zal volgen dat ook $M_n^{s-1}A = B$

een positieve minimaliserende matrix is. We kunnen dus Stelling 3.1.6 toepassen en vinden dat alle permanenten van deelmatrices van B van orde $n-1$ gelijk zijn, dus:

$$\operatorname{per} B = \operatorname{per} B(1|j) = \frac{n!}{n^n}.$$

Door $\operatorname{per} B(1|j)$ te ontwikkelen naar de tweede rij en j-de kolom, vervolgens Stelling 3.1.7 toe te passen en tot slot gebruik te maken van het dubbelstochastische karakter van B, vinden we:

$$\operatorname{per} B(1|j) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} b_{2k} \operatorname{per} B(1,2|j,k) = \frac{(n-2)!}{n^{n-2}} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} b_{2k} = \frac{(n-2)!}{n^{n-2}}(1-b_{2j}).$$

Voor alle $j = 1, \ldots, n$ moet dus gelden dat

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{(n-2)!}{n^{n-2}}(1-b_{2j}) \iff 1 - b_{2j} = \frac{n(n-1)}{n^2} \iff b_{2j} = \frac{1}{n}.$$

Uit (3.1.5) volgt nu ook dat $b_{11} = b_{12} = \ldots = b_{1n} = \frac{1}{n}$ en dat bijgevolg $B = J_n$, in tegenspraak met de veronderstelling dat s het kleinste natuurlijk getal was waarvoor $M_n^s = J_n$. We besluiten dat alle termen in de rij (3.1.4) verschillend zijn van J_n, dus dat $A, M_nA, M_n^2A, \ldots$ een oneindige rij is van positieve minimaliserende matrices verschillend van J_n. Omdat we reeds weten dat $M_n^k \to J_n$ voor $k \to +\infty$, volgt nu dat er in een willekeurig kleine omgeving van J_n matrices bestaan die verschillend zijn van J_n, maar die dezelfde permanent hebben als $\operatorname{per} J_n$. Dit is echter in strijd met het voorgaande lemma. De veronderstelling dat $A \neq J_n$ is dus niet geldig, waarmee het gestelde bewezen is. □

D. W. Sasser en M. L. Slater toonden aan dat in het inwendige gebied van Ω_n het relatieve minimum voor de permanentfunctie enkel wordt bereikt voor $\operatorname{per} J_n$ (zie [42, pp. 91-95]).

Nadat Marcus en Newman hadden aangetoond dat voor een minimaliserende matrix $A \in \Omega_n^*$ geldt dat $A = J_n$, bestudeerden ze allerhande eigenschappen van minimaliserende matrices verschillend van J_n (zie [39, pp. 81 e.v.]) in de hoop om tot de constructie te komen van een minimaliserende matrix verschillend van J_n (wat op zijn minst het deel van het vermoeden van Van der Waerden over de uniciteit van een minimaliserende matrix zou ontkrachten) of tot een bewijs dat staaft dat een minimaliserende matrix geen enkel nulelement bezit (waarmee het vermoeden zou bewezen zijn). Op basis van de eerder fragmentarische vooruitgang die Marcus en Newman boekten, koesterden ze echter weinig hoop om het bewijs te leveren op de laatstgenoemde manier. Om dat fragmentarische karakter te illustreren, formuleren we zo een eigenschap van Marcus en Newman (voor het bewijs verwijzen we naar [39, pp. 82-83]) en tonen we als voorbeeld het vermoeden van Van der Waerden aan voor een vierkante matrix van orde 3 als specifiek geval.

Stelling 3.1.10. *Zij $A \neq J_n$ een minimaliserende matrix. Dan kunnen alle nulelementen van A niet in eenzelfde rij of kolom voorkomen.*

Voorbeeld 3.1.11. Veronderstel dat A een minimaliserende matrix is verschillend van J_3. Dan is A volledig niet-decomposeerbaar en kan deze matrix wegens Stelling 3.1.10 niet al haar nulelementen in dezelfde rij of kolom bezitten. Er bestaan bijgevolg permutatiematrices P en Q

zodanig dat

$$PAQ = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ b & 0 & 1-b \\ 1-b & 1-a & a+b-1 \end{pmatrix},$$

met $0 < a < 1, 0 < b < 1$ en $a + b \geq 1$. Wegens Stelling 3.1.6 volgt er dat

$$\operatorname{per} A = \operatorname{per} PAQ(2|3) = \operatorname{per} PAQ(3|2).$$

Uitrekenen levert dat

$$\operatorname{per} A = a(1-b) = b(1-a),$$

dus moet $a = b$. Veronderstel dat $a + b - 1 > 0$, dan geldt:

$$\operatorname{per} A = \operatorname{per} PAQ(3|3) = ab = a^2.$$

We besluiten dan dat $a = b = \frac{1}{2}$, in tegenspraak met de assumptie dat $a + b - 1 > 0$. Als echter zou gelden dat $a + b - 1 = 0$, zien we onmiddellijk dat ook $a = b = \frac{1}{2}$. We verkrijgen dan:

$$PAQ = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Er volgt nu echter dat $\operatorname{per} PAQ = \operatorname{per} A = \frac{1}{4} > \operatorname{per} J_3 = \frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}$. Dit is strijdig met de aanname dat A een minimaliserende matrix is, dus J_3 is de unieke minimaliserende matrix in Ω_3.

De (pogingen tot) bewijzen die ruim tien jaar later door andere wiskundigen geleverd werden voor het staven van Vermoeden 3.1.1, getuigen inderdaad van een afwijkende aanpak.

3.2 Een eerste bewijs

De invalshoek die we hier belichten, zal Stelling 3.1.6 veralgemenen door de conditie van een strikt positief element in de minimaliserende dubbelstochastische matrix weg te laten. We volgen de aanpak van Egorychev, gebaseerd op de veralgemening van Stelling 3.1.6 door D. London (zie [33, Theorem 1]). Het bewijs dat we hieronder geven, onderging echter nog een kleine wijziging door J. H. van Lint, die het bewijs dat London leverde voor lokale minimaliserende matrices[11] veralgemeende naar (globale) minimaliserende matrices (zie [51, Theorem 4.7]).

Stelling 3.2.1. *Zij $A = (a_{ij}) \in \Omega_n$ een minimaliserende matrix. Dan geldt voor alle $i, j = 1, \ldots, n$:*

$$\operatorname{per} A(i|j) \geq \operatorname{per} A.$$

Bewijs. Neem willekeurig $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dan bestaat er wegens Gevolg 3.1.5 een permutatie σ zodat $\sigma(i) = j$ en $a_{s,\sigma(s)} > 0$ voor $1 \leq s \leq n, s \neq i$. Noteer met $P = (p_{ij})$ de corresponderende permutatiematrix. Voor alle $\theta \in [0, 1]$ definiëren we

$$f(\theta) := \operatorname{per}((1-\theta)A + \theta P).$$

[11] Een matrix $A = (a_{ij}) \in \Omega_n$ is een lokale minimaliserende matrix van $\operatorname{per} S$, $S \in \Omega_n$, als er een $\epsilon > 0$ bestaat zodat $\operatorname{per} A \leq \operatorname{per} B$ voor elke $B = (b_{ij}) \in \Omega_n$ zodat $|b_{ij} - a_{ij}| < \epsilon$, voor alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Deze functie afleiden naar θ levert:

$$f'(\theta) = \sum_{i,j=1}^{n} (-a_{ij} + p_{ij}) \operatorname{per} A(i|j).$$

Omdat A minimaliserend is, geldt voor alle P dat $f'(0) \geq 0$. Omdat we uit Stelling 3.1.6 weten dat $\operatorname{per} A(s|\sigma(s)) = \operatorname{per} A$ voor $s \neq i$, vinden we dat

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} (-a_{ij} + p_{ij}) \operatorname{per} A(i|j) &= -n \ \operatorname{per} A + \sum_{s=1}^{n} \operatorname{per} A(s|\sigma(s)) \\ &= -n \ \operatorname{per} A + (n-1) \operatorname{per} A + \operatorname{per} A(i|j) \\ &= -\operatorname{per} A + \operatorname{per} A(i|j), \end{aligned}$$

waaruit het gestelde volgt. □

Een van de cruciale laatste stappen in het bewijs van Egorychev zal de toepassing zijn van de volgende stelling.

Stelling 3.2.2 (Alexandroff-Fenchel)**.** *Zij* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ *vectoren in* $\mathbb{R}^n$ *met positieve coördinaten en zij* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$*. Dan geldt:*

$$(\operatorname{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}))^2 \geq \operatorname{per}(\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_{n-1}) \cdot \operatorname{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{b}, \mathbf{b}),$$

met gelijkheid als en slechts als $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}_{n-1}$ *voor een zekere constante* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Om tot het bewijs van deze stelling te kunnen komen, wijden we eerst een stukje aan lineaire algebra.

Definitie 3.2.3. (i) Beschouw de ruimte $\mathbb{R}^n$ met een symmetrisch inproduct gegeven door $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T Q \mathbf{y}$. Als Q een positieve eigenwaarde en $n-1$ negatieve eigenwaarden heeft, spreken we van een **Lorentz-ruimte**.

(ii) Een niet-nulvector $\mathbf{x}$ in een Lorentz-ruimte noemen we **isotroop** als $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$, **positief** als $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ en **negatief** als $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$.

We formuleren en bewijzen eerst een hulpstelling (zie [50, Lemma 2.5]), gebaseerd op de traagheidswet van James Joseph Sylvester (1852). Die stelt dat het aantal positieve en het aantal negatieve eigenwaarden van de coëfficiëntenmatrix van een kwadratische vorm invariant is onder verandering van basis (zie [48, Stelling 5.2.3]). Bijgevolg bestaat er geen vlak waarop $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ positief is, voor $\mathbf{x} \neq 0$.

Lemma 3.2.4. *Zij* $\mathbf{a}$ *een positieve vector in een Lorentz-ruimte en* $\mathbf{b}$ *een willekeurige vector. Dan geldt:*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \geq \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle,$$

met gelijkheid als en slechts als $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ *voor een zekere constante* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Als $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ geen veelvoud is van $\mathbf{a}$, dan volgt uit de voorafgaande beschouwing omtrent Sylvesters stelling dat het oppervlak opgespannen door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ een isotrope en een negatieve vector bevat. Beschouw

$$\langle \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 2\lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \tag{3.2.1}$$

als een kwadratische vorm in $\lambda \in \mathbb{R}$. Aangezien deze kwadratische vorm respectievelijk nul en negatief moet zijn voor zekere waarden van λ, moet de discriminant van $\langle \mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}, \mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}\rangle$ positief zijn opdat (3.2.1) verschillende oplossingen zou bezitten. Bijgevolg vinden we dat

$$4\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2 - 4\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle > 0,$$

waaruit de gestelde ongelijkheid in zijn strikte vorm volgt.
Als $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ voor een zekere $\lambda \in \mathbb{R}$, dan vinden we direct dat $\langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{a}\rangle^2 = \lambda^2\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle\langle \lambda\mathbf{a}, \lambda\mathbf{a}\rangle$. Als omgekeerd geldt dat $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle$, dan is het duidelijk dat $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ lineair afhankelijk moeten zijn. $\square$

We leggen nu het verband met permanenten, na het aanhalen van een handige observatie.

Opmerking 3.2.5. Beschouw een matrix $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ van orde n. Wanneer we permanenten van matrices van orde $n-1$ beschouwen maar het wenselijk blijkt om de notatie voor permanenten van matrices van orde n te behouden, schrijven we $\mathrm{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{e}_j)$, met $\mathbf{e}_j$ de j-de vector van de standaardbasis waarmee we werken. De permanent van deze matrix verandert immers niet wanneer we de j-de rij en de n-de kolom verwijderen, wat eenvoudig in te zien is door ontwikkeling naar die rij en kolom:

$$\mathrm{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{e}_j) = \mathrm{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{e}_j) \quad (j|n).$$

Definitie 3.2.6. Zij $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}$ vectoren in $\mathbb{R}^n$ met positieve coördinaten en $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ de standaardbasis in $\mathbb{R}^n$. We definiëren dan een inproduct op $\mathbb{R}^n$ door

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle := \mathrm{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{3.2.2}$$

wat neerkomt op

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^T Q\mathbf{y}, \text{ met } Q = (q_{ij}) \text{ gegeven door } q_{ij} := \mathrm{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \tag{3.2.3}$$

Uit Opmerking 3.2.5 volgt dat we in bovenstaande definitie voor een matrix $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ ook kunnen schrijven dat $q_{ij} = \mathrm{per}\, A(i, j|n-1, n))$.
Dat we van elke ruimte $\mathbb{R}^n$ een Lorentz-ruimte kunnen maken met behulp van het zonet gedefinieerde inproduct, tonen we nu aan, gebaseerd op [51] en [50].

Stelling 3.2.7. *De ruimte $\mathbb{R}^n$ met het inwendig product zoals gedefinieerd in (3.2.2), is een Lorentz-ruimte.*

Bewijs. Merk vooreerst op dat het inproduct gedefinieerd in (3.2.2) alvast symmetrisch is. We bewijzen de stelling nu met inductie op de orde van Q. Voor $n = 2$ hebben we dat $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$: deze matrix heeft eigenwaarden 1 en -1, dus $\mathbb{R}^2$ is een Lorentz-ruimte. Veronderstel vervolgens dat de stelling bewezen is voor $\mathbb{R}^{n-1}$. We beweren dat Q geen eigenwaarde 0 heeft. Stel hiertoe dat $Q\mathbf{c} = \mathbf{0}$; we wensen dan aan te tonen dat deze gelijkheid enkel geldt voor $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Met (3.2.3) kunnen we $Q\mathbf{c} = \mathbf{0}$ equivalent schrijven als

$$\mathrm{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{c}, \mathbf{e}_j) = 0 \qquad \text{voor alle } 1 \leq j \leq n. \tag{3.2.4}$$

Wanneer we de laatste kolom en de j-de rij in deze uitdrukking verwijderen, bekomen we de permanent van een matrix van orde $n-1$. We beschouwen dan het inproduct in $\mathbb{R}^{n-1}$ gegeven door

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle' := \mathrm{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-3}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_j) \quad (j|n), \tag{3.2.5}$$

waarop we de inductiehypothese en bijgevolg ook Lemma 3.2.4 kunnen toepassen. Omdat $\mathbf{a}_{n-2}$ positieve coördinaten heeft, levert substitutie van $\mathbf{x} = \mathbf{a}_{n-2}$ en $\mathbf{y} = \mathbf{a}_{n-2}$ in (3.2.5) een positieve waarde op. Uit Opmerking 3.2.5 en (3.2.4) volgt dat substitutie van $\mathbf{x} = \mathbf{a}_{n-2}$ en $\mathbf{y} = \mathbf{c}$ in (3.2.5) resulteert in de waarde 0. Uit Lemma 3.2.4 volgt de uitspraak: 'Als $\mathbf{a}$ positief is en $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, dan impliceert $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ dat $\mathbf{b}$ negatief is'. We vinden dan dat

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle' = \operatorname{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-3}, \mathbf{c}, \mathbf{c}, \mathbf{e}_j) \leq 0$$

voor alle $1 \leq j \leq n$. Ook volgt dat voor elke j de gelijkheid geldt als en slechts als alle coördinaten van $\mathbf{c}$ behalve de j-de (omdat deze coördinaat bij ontwikkeling naar de j-de rij geen bijdrage levert) gelijk zijn aan 0. Vermenigvuldigen we deze ongelijkheid nu met de j-de coördinaat van $\mathbf{a}_{n-2}$ en sommeren we vervolgens over j, verkrijgen we dat

$$\operatorname{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-3}, \mathbf{c}, \mathbf{c}, \mathbf{a}_{n-2}) = \operatorname{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-3}, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{c}, \mathbf{c}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = \mathbf{c}^T Q \mathbf{c} \leq 0,$$

met gelijkheid als en slechts als alle coördinaten van $\mathbf{c}$ gelijk zijn aan 0. Omdat we vertrokken van $Q\mathbf{c} = \mathbf{0}$ en bijgevolg $\mathbf{c}^T Q \mathbf{c} = 0$, besluiten we hieruit dat $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.
Beschouw nu het inproduct $x^T Q_\theta y$ gedefinieerd door

$$x^T Q_\theta y := \operatorname{per}((1-\theta)\mathbf{j} + \theta \mathbf{a}_1, \ldots, (1-\theta)\mathbf{j} + \theta \mathbf{a}_{n-2}, x, y),$$

voor elke $\theta \in [0, 1]$ en met $\mathbf{j} := (1 \cdots 1)^T$. Uit hetgeen we zonet bewezen hebben, weten we dat Q_θ geen eigenwaarde heeft die gelijk is aan 0. Het aantal positieve eigenwaarden van $Q = Q_1$ is dus gelijk aan het aantal positieve eigenwaarden van Q_0. Aangezien Q_0 een veelvoud is van $nJ_n - I_n$, is dit aantal gelijk aan 1, waarmee de stelling bewezen is. □

We kunnen het bewijs van de stelling van Alexandroff-Fenchel nu eenvoudig voltooien.

Bewijs van Stelling 3.2.2. Volgt onmiddellijk uit Lemma 3.2.4 en Stelling 3.2.7. □

Opmerking 3.2.8. De ongelijkheid in de stelling van Alexandroff-Fenchel is duidelijk ook geldig voor niet-negatieve vectoren $\mathbf{a}_i$. De uitspraak over het gevolg in geval van gelijkheid kan dan echter niet gemaakt worden.

In de laatste rechte lijn naar het bewijs van het vermoeden van Van der Waerden, toont Egorychev een bewering aan die Stelling 3.1.6 veralgemeent.

Stelling 3.2.9. *Zij $A = (a_{ij}) \in \Omega_n$ een minimaliserende matrix. Dan geldt voor alle $i, j = 1, \ldots, n$:*

$$\operatorname{per} A(i|j) = \operatorname{per} A.$$

Bewijs. Veronderstel dat de uitspraak niet waar is. Wegens Stelling 3.2.1 bestaat er een paar (r, s) zodanig dat $\operatorname{per} A(r|s) > \operatorname{per} A$. Dankzij Gevolg 3.1.4 weten we dat het mogelijk is om een t te kiezen zodanig dat $a_{rt} > 0$. We passen nu Stelling 3.2.2 toe en maken gebruik van Opmerking 3.2.8:

$$\begin{aligned}(\operatorname{per} A)^2 &= (\operatorname{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s, \ldots, \mathbf{a}_t, \ldots, \mathbf{a}_n))^2 \\ &\geq \operatorname{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s, \ldots, \mathbf{a}_s, \ldots, \mathbf{a}_n) \cdot \operatorname{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t, \ldots, \mathbf{a}_t, \ldots, \mathbf{a}_n)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ks} \operatorname{per} A(k|t)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kt} \operatorname{per} A(k|s)\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ks} \operatorname{per} A(k|t)\right) \cdot \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r}}^{n} a_{kt} \operatorname{per} A(k|s) + a_{rt} \operatorname{per} A(r|s)\right) \qquad (3.2.6)\\
&> \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ks} \operatorname{per} A\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kt} \operatorname{per} A\right) \\
&= (\operatorname{per} A)^2.
\end{aligned}
$$

In de stap met de strikte ongelijkheid maakten we gebruik van het feit dat de permanent van elke deelmatrix in (3.2.6) groter dan of gelijk is aan $\operatorname{per} A$ wegens Stelling 3.2.1, dat $a_{rt} > 0$ en het feit dat $\operatorname{per} A(r|s)$ strikt groter is dan $\operatorname{per} A$. We besluiten dus dat $(\operatorname{per} A)^2 > (\operatorname{per} A)^2$, een strijdigheid. □

Lemma 3.2.10. *Zij $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in \Omega_n$ een minimaliserende matrix en zij A' de matrix verkregen uit A door zowel $\mathbf{a}_i$ als $\mathbf{a}_j$ te vervangen door $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j)$. Dan geldt dat A' ook een minimaliserende matrix is in Ω_n.*

Bewijs. Het is onmiddellijk duidelijk dat $A' \in \Omega_n$. Door multilineariteit van de permanentfunctie, ontwikkeling van A' naar de j-de kolom en toepassing van Stelling 3.2.9 vinden we:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{per} A' &= \frac{1}{2} \operatorname{per} A + \frac{1}{4} \operatorname{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n) + \frac{1}{4} \operatorname{per}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{per} A + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \operatorname{per} A(k|j) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \operatorname{per} A(k|i) \\
&= \operatorname{per} A.
\end{aligned}
$$

Dus ook A' is een minimaliserende matrix. □

We hebben nu alle puzzelstukjes voorhanden om het bewijs van het vermoeden van Van der Waerden af te werken.

Stelling 3.2.11 (Vermoeden van Van der Waerden)**.** *Zij $A \in \Omega_n$ en $A \neq J_n$. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A > \operatorname{per} J_n.$$

Bewijs. Zij A een dubbelstochastische minimaliserende matrix van orde n en zij $\mathbf{b}$ een kolom van A; stel zonder verlies van algemeenheid dat $\mathbf{b}$ de laatste kolom is, dus $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b})$. Uit Lemma 3.1.3 volgt dat er in elke rij van A minstens een positief element in de overige $n-1$ kolommen staat. Passen we nu een eindig aantal keer het substitutieprincipe uit Lemma 3.2.10 toe zonder de laatste kolom te wijzigen, dan kunnen we een minimaliserende matrix $A' = (\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_{n-1}, \mathbf{b})$ vinden met allemaal positieve coördinaten in de kolommen $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_{n-1}$. We passen vervolgens Stelling 3.2.2 toe op $\operatorname{per} A'$ en verkrijgen:

$$\big(\operatorname{per}(\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_{n-1}, \mathbf{b})\big)^2 \geq \operatorname{per}(\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_{n-1}, \mathbf{a}'_{n-1}) \ \operatorname{per}(\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_{n-2}, \mathbf{b}, \mathbf{b}). \qquad (3.2.7)$$

Gebruik makend van Stelling 3.2.9 toegepast voor $i = 1$ en $j = n$ op elke permanent in bovenstaande ongelijkheid, kunnen we deze equivalent schrijven als

$$\Big(\operatorname{per}(\mathbf{a}'^{(1)}_1, \ldots, \mathbf{a}'^{(1)}_{n-1})\Big)^2 \geq \operatorname{per}(\mathbf{a}'^{(1)}_1, \ldots, \mathbf{a}'^{(1)}_{n-1}) \ \operatorname{per}(\mathbf{a}'^{(1)}_1, \ldots, \mathbf{a}'^{(1)}_{n-2}, \mathbf{b}^{(1)}),$$

waarbij de exponent (1) duidt op het eerste element dat in elke kolom is weggevallen. Nogmaals toepassen van Stelling 3.2.9 voor $i = 1$ en $j = n-1$ laat ons toe dit nog equivalent uit te drukken als:

$$\left(\text{per}(\mathbf{a}_1'^{(12)}, \dots, \mathbf{a}_{n-2}'^{(12)})\right)^2 \geq \text{per}(\mathbf{a}_1'^{(12)}, \dots, \mathbf{a}_{n-2}'^{(12)}) \ \text{per}(\mathbf{a}_1'^{(12)}, \dots, \mathbf{a}_{n-2}'^{(12)}),$$

waarbij de exponent (12) analoog duidt op het ontbreken van de eerste twee elementen in elke kolom. We merken op dat linker- en rechtlid van de ongelijkheid gelijk zijn, dus ook (3.2.7) is een gelijkheid. Uit Stelling 3.2.2 volgt dan dat $\mathbf{b}$ een veelvoud is van $\mathbf{a}'_{n-1}$ en analoog vinden we dat $\mathbf{b}$ een veelvoud is van $\mathbf{a}'_i$ voor alle $1 \leq i \leq n-1$. Omdat $\mathbf{a}'_1 + \ldots + \mathbf{a}'_{n-1} + \mathbf{b} = \mathbf{j}$, betekent dit dat $\mathbf{b} = n^{-1}\mathbf{j}$. Er volgt dat $A = J_n$.

□

3.3 Een alternatief bewijs

Van Lint beëindigt in [51] zijn bevindingen met de woorden: "It is not unlikely that these ideas will lead to other even more simple proofs. One may certainly expect other applications of the Alexandroff-Fenchel inequality in combinatorics.".
Alternatieve bewijzen corresponderend met de invalshoek van Van Lint bleven echter uit. De Hongaarse wiskundige Béla Gyires publiceerde in 1996 wel een helemaal ander bewijs voor het vermoeden van Van der Waerden, dat eerder van combinatorische aard is (zie [19, Section 3]). Deze aanpak blijkt als bijkomend voordeel te hebben een veralgemening van het vermoeden van Van der Waerden te kunnen formuleren, wat we verderop ook in detail zullen toelichten.
We beginnen met enkele onontbeerlijke definities en notaties horende bij deze aanpak.
Ter herinnering (zie Notatie 1.1.2) stelt $\mathcal{M}_n$ de verzameling voor van alle vierkante matrices van orde n waarvoor alle kolom- en rijsommen gelijk zijn aan 1.

Definitie 3.3.1. Zij $A \in \mathcal{M}_n$. Dan definiëren we de volgende functies van permanenten van $k \times k$-deelmatrices van A, voor alle $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} T_k(A) &:= \sum \text{per}\, A[i_1, \dots, i_k | j_1, \dots, j_k], \\ R_k(A) &:= \sum \text{per}\, A[i_1, \dots, i_k | j_1, \dots, j_k] \ \ \text{som}\, A[i_1, \dots, i_k | j_1, \dots, j_k], \end{aligned}$$

waarbij som $B := \sum_{i,j=1} b_{ij}$ voor een (vierkante) matrix $B = (b_{ij})$ en er in beide uitdrukkingen gesommeerd wordt over alle combinaties $(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_k) \in Q_{k,n}$.
Merk op dat er per definitie onmiddellijk geldt dat $T_n(A) = \text{per}\, A$.
Verder noteren we:

$$\begin{aligned} S_k(A) &:= \frac{R_k(A)}{T_k(A)} \qquad \text{voor elke } k = 1, \dots, n, \\ P_k(A) &:= \frac{T_{k+1}(A)}{T_k(A)} \qquad \text{voor elke } k = 1, \dots, n-1, \\ t_k(A) &:= \frac{1}{\binom{n}{k}^2} T_k(A) \qquad \text{voor elke } k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Merk hierbij op dat $t_k(A)$ geïnterpreteerd kan worden als het rekenkundig gemiddelde van de permament van een deelmatrix van A met k rijen en k kolommen.

Voorbeeld 3.3.2. Beschouw de dubbelstochastische matrix A van orde 3:

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Zij $k = 2$. Dan berekenen we:

$$\begin{aligned} T_2(A) &= \sum_{\substack{(i_1,i_2)\in Q_{2,3} \\ (j_1,j_2)\in Q_{2,3}}} \operatorname{per} A[i_1, i_2|j_1, j_2] \\ &= \operatorname{per} A[1,2|1,2] + \operatorname{per} A[1,3|1,2] + \operatorname{per} A[2,3|1,2] \\ &\quad + \operatorname{per} A[1,2|1,3] + \operatorname{per} A[1,3|1,3] + \operatorname{per} A[2,3|1,3] \\ &\quad + \operatorname{per} A[1,2|2,3] + \operatorname{per} A[1,3|2,3] + \operatorname{per} A[2,3|2,3] \\ &= (0.4 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.1) + (0.4 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.1) + (0.2 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.7) \\ &\quad + (0.4 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.5) + (0.4 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.5) + (0.2 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.1) \\ &\quad + (0.1 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.5) + (0.1 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.5) + (0.7 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.1) \\ &= 2.16. \end{aligned}$$

Bijgevolg geldt:

$$t_2(A) = \frac{1}{\binom{3}{2}^2} \cdot T_2(A) = \frac{1}{3^2} \cdot 2.16 = 0.24.$$

Op analoge wijze vinden we dat

$$R_2(A) = \sum_{\substack{(i_1,i_2)\in Q_{2,3} \\ (j_1,j_2)\in Q_{2,3}}} \operatorname{per} A[i_1, i_2|j_1, j_2] \cdot \operatorname{som} A[i_1, i_2|j_1, j_2] = \ldots = 3.036$$

en bijgevolg:

$$S_2(A) = \frac{R_2(A)}{T_2(A)} = \frac{3.036}{2.16} = 1.4055...$$

Notatie 3.3.3. (i) Zij $A \in \mathcal{M}_n$. Met $(AA^T)^{1/2}$ en $(A^TA)^{1/2}$ noteren we de positief semi-definiete vierkantswortel van respectievelijk AA^T en A^TA.

(ii) De verzameling vectoren $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, waarbij de componenten natuurlijke getallen zijn die voor elke $k = 1, \ldots, n$ voldoen aan de voorwaarden

$$0 \leq \beta_k \leq n, \quad \sum_{k=1}^{n} \beta_k = n,$$

noteren we met Γ_n.

(iii) Zij $A \in \mathcal{M}_n$. Met $C_{\beta_1 \cdots \beta_n}(A)$ noteren we de matrix die bestaat uit bepaalde kolommen van A; de k-de kolom van A, voor $k = 1, \ldots, n$, verschijnt namelijk β_k keer in $C_{\beta_1 \cdots \beta_n}(A)$, waarbij $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ loopt over Γ_n.

Voorbeeld 3.3.4. Beschouw een willekeurige matrix $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3$. We brengen Definitie 3.1.3(i) in herinnering. Zij $\omega = (1, 1, 3)$, dan geldt: $\mu(\omega) = 2$ en

$$\text{per}\, A[1, 2, 3|\omega] = \text{per} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

en ook

$$C_{2\ 0\ 1}(A) = \text{per} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Bovenstaand klein voorbeeld illustreert dat Notatie 3.3.3(iii) een zekere specificatie geeft ten opzichte van de notatie die we tot nu toe hanteerden en gebaseerd was op Definitie 3.1.3. De nieuw geïntroduceerde notatie zal handig blijken in bewijzen die volgen. We geven eerst nog enkele definities die nauw verwant zijn aan Definitie 3.3.1.

Definitie 3.3.5. Zij $A \in \mathcal{M}_n$ en zij p, q niet-negatieve reële getallen waarvoor $p + q = 1$. Dan definiëren we voor alle $k = 1, \ldots, n$:

$$T_k^{(p)}(A) := p^2\ T_k\left((AA^T)^{1/2}\right) + q^2\ T_k\left((A^T A)^{1/2}\right) + 2pq\ T_k(A),$$
$$R_k^{(p)}(A) := p^2\ R_k\left((AA^T)^{1/2}\right) + q^2\ R_k\left((A^T A)^{1/2}\right) + 2pq\ R_k(A).$$

Verder noteren we:

$$S_k^{(p)}(A) := \frac{R_k^{(p)}(A)}{T_k^{(p)}(A)} \qquad \text{voor elke } k = 1, \ldots, n \text{ en}$$
$$P_k^{(p)}(A) := \frac{T_{k+1}^{(p)}(A)}{T_k^{(p)}(A)} \qquad \text{voor elke } k = 1, \ldots, n-1.$$

Opmerking 3.3.6. Zij $p, q \geq 0$ en $p + q = 1$. Voor de dubbelstochastische matrix J_n geldt dat

$$T_k^{(p)}(J_n) = (p^2 + q^2 + 2pq)\ T_k(J_n) = (p+q)^2\ T_k(J_n) = T_k(J_n)$$
$$\text{en } R_k^{(p)}(J_n) = (p^2 + q^2 + 2pq)\ R_k(J_n) = (p+q)^2\ R_k(J_n) = R_k(J_n).$$

We formuleren en bewijzen nu een stelling (zie [19] en [20]) die op het eerste gezicht geen direct verband ontbloot met het vermoeden van Van der Waerden. Hierna zullen we echter aantonen dat beide stellingen equivalent zijn, waarmee op een alternatieve wijze het vermoeden van Van der Waerden dus gestaafd is.

Stelling 3.3.7. *Zij $A \in \mathcal{M}_n$ en zij p, q niet-negatieve reële getallen waarvoor $p + q = 1$. Dan geldt:*

$$p^2\ \text{per}(AA^T)^{1/2} + q^2\ \text{per}(A^T A)^{1/2} + 2pq\ \text{per}\, A \geq \frac{n!}{n^n},$$

met gelijkheid als en slechts als $A = J_n$.

Bewijs. Uit basistheorie omtrent linaire algebra (zie bijvoorbeeld [5]) weten we dat er een polaire decompositie van een vierkante matrix A van orde n bestaat, namelijk: $A = U\Lambda V^T$, waarbij $U = (u_{ij})$ en $V = (v_{ij})$ orthogonale $n \times n$-matrices voorstellen en Λ een diagonaalmatrix is met niet-negatieve diagonaalelementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dankzij de stelling van Cauchy-Binet voor de permanent van het product van matrices kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned}
\operatorname{per} A = \operatorname{per} U\Lambda V^T &= \sum_{\omega \in G_{n,n}} \frac{1}{\mu(\omega)} \operatorname{per}(U\Lambda)[1,\dots,n|\omega] \ \operatorname{per} V^T[\omega|1,\dots,n] \\
&= \sum_{\omega \in G_{n,n}} \frac{1}{\mu(\omega)} \operatorname{per}(U\Lambda)[1,\dots,n|\omega] \ \operatorname{per} V[1,\dots,n|\omega].
\end{aligned}$$

Om nu de specifieke gedaante van Λ in rekening te brengen bij de uitwerking van $\operatorname{per}(U\Lambda)[1,\dots,n|\omega]$, maken we gebruik van een alternatieve formulering gebaseerd op Notatie 3.3.3, hetgeen we reeds hebben toegepast op Voorbeeld 3.3.4. Als we nu $(\beta_1,\dots,\beta_n) \in \Gamma_n$ beschouwen in plaats van $\omega \in G_{n,n}$, vinden we dat $\mu(\omega) = \beta_1! \cdots \beta_n!$. Omdat we de matrix $U\Lambda$ verkrijgen door de i-de kolom van U te vermenigvuldigen met λ_i, voor alle $i = 1,\dots,n$, besluiten we met behulp van de multilineariteit van de permanentfunctie dat

$$\operatorname{per} A = \sum_{(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\Gamma_n} \frac{\lambda_1^{\beta_1}\cdots\lambda_n^{\beta_n}}{\beta_1!\cdots\beta_n!} \operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(U) \ \operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(V). \tag{3.3.1}$$

Beschouw nu de positief semi-definiete vierkantswortels van AA^T en A^TA , die we vanwege de polaire decompositie van A en expliciet gebruik makend van de orthogonaliteit van V en U kunnen herschrijven als

$$\begin{aligned}
(AA^T)^{1/2} &= (U\Lambda V^T V\Lambda^T U^T)^{1/2} = (U\Lambda\Lambda^T U^T)^{1/2} = (U\Lambda^2 U^T)^{1/2} = U\Lambda U^T, \\
(A^TA)^{1/2} &= (V\Lambda^T U^T U\Lambda V^T)^{1/2} = (V\Lambda^T\Lambda V^T)^{1/2} = (V\Lambda^2 V^T)^{1/2} = V\Lambda V^T.
\end{aligned}$$

Er volgt dan dat

$$\operatorname{per}(AA^T)^{1/2} = \sum_{(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\Gamma_n} \frac{\lambda_1^{\beta_1}\cdots\lambda_n^{\beta_n}}{\beta_1!\cdots\beta_n!} \operatorname{per}^2 C_{\beta_1\cdots\beta_n}(U), \tag{3.3.2}$$

$$\operatorname{per}(A^TA)^{1/2} = \sum_{(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\Gamma_n} \frac{\lambda_1^{\beta_1}\cdots\lambda_n^{\beta_n}}{\beta_1!\cdots\beta_n!} \operatorname{per}^2 C_{\beta_1\cdots\beta_n}(V). \tag{3.3.3}$$

Het linkerlid van de te bewijzen ongelijkheid laat zich hierdoor herschrijven als

$$\begin{aligned}
&p^2 \ \operatorname{per}(AA^T)^{1/2} + q^2 \ \operatorname{per}(A^TA)^{1/2} + 2pq \ \operatorname{per} A \qquad (3.3.4)\\
&= \sum_{(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\Gamma_n} \frac{\lambda_1^{\beta_1}\cdots\lambda_n^{\beta_n}}{\beta_1!\cdots\beta_n!} \left(p \ \operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(U) + q \ \operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(V)\right)^2.
\end{aligned}$$

Uit Opmerking 1.2.8 weten we dat $\lambda_k = 1$ voor een zekere $k \in \{1,\dots,n\}$ met bijhorende eigenvector $e := (1\cdots1)^T$. Bijgevolg geldt voor alle $i = 1,\dots,n$:

$$u_{ik} = v_{ik} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n}$$

en dus

$$C_{\beta_k=n}(U) = C_{\beta_k=n}(V) = \sqrt{n}J_n.$$

We vinden dan dat

$$\frac{\lambda_k^{\beta_k}}{\beta_k!}\left(p \ \operatorname{per} C_{\beta_k=n}(U) + q \ \operatorname{per} C_{\beta_k=n}(V)\right)^2 = \frac{1}{n!}(p+q)^2\left(\frac{n!}{\sqrt{n}^n}\right)^2 = \frac{n!}{n^n}.$$

Samen met (3.3.4) volgt dus de te bewijzen ongelijkheid.
Gelijkheid verkrijgen we als en slechts als

$$\lambda_1^{\beta_1}\cdots\lambda_n^{\beta_n}\left(p \ \operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(U) + q \ \operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(V)\right) = 0 \tag{3.3.5}$$

met $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \Gamma_n$ en elke $\beta_k < n$. We wensen nu aan te tonen dat $\lambda_j = 0$ voor een zekere $j \in \{2, \ldots, n\}$. Dat zou namelijk equivalent zijn met

$$A := \begin{pmatrix} u_{11}v_{11} & \ldots & u_{11}v_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}v_{11} & \ldots & u_{n1}v_{n1} \end{pmatrix}$$

en $u_{i1} = v_{i1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ voor alle $i = 1, \ldots, n$, wat dus gelijkwaardig is met $A = J_n$.
Als $\lambda_j > 0$ en $\lambda_{j+1} = 0$, dan is (3.3.5) equivalent met

$$p \ \operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(U) + q \ \operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(V) = 0 \tag{3.3.6}$$

voor $\beta_1 + \ldots + \beta_j = n$ en $\beta_k < n$. We zullen aantonen dat dit geen steek houdt als $j > 1$. Veronderstel hiertoe dat $l \neq k, l \leq j$. Noteer met $u_1, \ldots, u_n$ en $v_1, \ldots, v_n$ de elementen van de l-de kolom van respectievelijk U en V. We vinden dan dat

$$\operatorname{per} C_{\beta_l=i,\beta_k=n-i}(U) = i!(n-i)!\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-i} G_i(u_1, \ldots, u_n), \tag{3.3.7}$$

$$\operatorname{per} C_{\beta_l=i,\beta_k=n-i}(V) = i!(n-i)!\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-i} G_i(v_1, \ldots, v_n), \tag{3.3.8}$$

waarbij voor alle $i = 1, \ldots, n$ geldt:

$$G_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1\leq\alpha_1<\ldots<\alpha_i\leq n} x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_i}.$$

Uit (3.3.6) halen we nu met behulp van (3.3.7) en (3.3.8) dat voor alle $i = 1, \ldots, n$ geldt:

$$G_i(u_1, \ldots, u_n) = c\ G_i(v_1, \ldots, v_n), \quad \text{met } c = -\frac{q}{p}.$$

Merk op dat we zonder de algemeenheid te schaden uit $p + q = 1$ inderdaad kunnen veronderstellen dat $p \neq 0$. Definieer vervolgens de veeltermfuncties

$$f(x) = (x-u_1)\cdots(x-u_n), \quad g(x) = c(x-v_1)\cdots(x-v_n),$$

waaruit met de voorgaande uitdrukking moet volgen dat $f = g$. Omdat f monisch is, volgt dat $c = 1$, dus $p + q = 0$. Dit is echter in strijd met het gegeven dat $p + q = 1$. We besluiten dat $j = 1$, $\lambda_j = 0$ voor alle $j = 2, \ldots, n$ en de te bewijzen ongelijkheid is een gelijkheid als en slechts als $A = J_n$. □

We formuleren en bewijzen eerst nog twee lhulpresultaten (zie [19, Lemma 2.1] en [20, Theorem 3.1]) alvorens we tot de stelling van Gyires komen die het verband met het vermoeden van Van der Waerden weergeeft.

Lemma 3.3.8. *Zij $x_0 \in \,]0,1[$ en $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dan heeft de matrixvergelijking*

$$(1-x_0)A + x_0(AA^T)^{2k+1} = J_n$$

enkel de triviale oplossing $A = J_n$ over $\mathcal{M}_n$.

Bewijs. Omdat J_n in het bijzonder normaal is, kan met de theorie omtrent diagonaliseerbaarheid van matrices gevonden worden dat er naast een polaire decompositie ook een spectraalrepresentatie voor J_n bestaat. Deze wordt gegeven door $J_n = V^T \Lambda V$, waarbij Λ een diagonaalmatrix voorstelt met elementen 0 en 1 op de diagonaal (dit zijn de eigenwaarden van J_n) en $V = (v_{ij})$ een Vandermondematrix is (waarbij de kolommen de eigenvectoren van J_n voorstellen), dus $v_{ij} = r_i^{j-1}$ met reële getallen r_i voor alle indices $i, j = 1, \ldots, n$. Merk op dat een oplossing A van de gegeven matrixvergelijking steeds symmetrisch is. Zij $A = U^T \Lambda_1 U$ de spectraalrepresentatie van A en Λ_1 de de diagonaalmatrix met diagonaalelementen $1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Omdat

$$AA^T = U^T \Lambda_1 U U^T \Lambda_1^T U = U^T \Lambda_1 \Lambda_1^T U = U^T \Lambda_1^2 U,$$

volgt dat

$$(AA^T)^{2k+1} = U^T \Lambda_1^{2k+1} U.$$

De matrixvergelijking uit het statement herleidt zich dan tot

$$\begin{aligned} & (1-x_0)U^T \Lambda_1 U + x_0 U^T \Lambda_1^{2k+1} U = J_n \\ \iff & U^T \left((1-x_0)\Lambda_1 + x_0 \Lambda_1^{2k+1} \right) U = V^T \Lambda V, \end{aligned}$$

dus moet $U = V$ en bijgevolg geldt

$$(1-x_0)\Lambda_1 + x_0 \Lambda_1^{2k+1} = \Lambda.$$

Gebruik makend van de concrete gedaante van de diagonaalmatrices vinden we dan voor alle $j = 2, \ldots, n$:

$$(1-x_0)\alpha_j + x_0 \alpha_j^{2k+1} = 0 \iff \alpha_j \left((1-x_0) + x_0 \alpha_j^{2k} \right) = 0.$$

De oplossingen van deze vergelijking worden voor alle $j = 2, \ldots, n$ dus gegeven door

$$(\alpha_j)_1 = 0 \quad \text{en} \quad (\alpha_j)_2 = \left(\frac{x_0 - 1}{x_0} \right)^{\frac{1}{2k}}.$$

Aangezien $(x_0 - 1)/x_0 < 0$ per assumptie, stelt $(\alpha_j)_2$ een evenmachtswortel van een strikt negatief getal voor, dus is $(\alpha_j)_2$ een imaginair getal. Dit is echter in tegenspraak met het feit dat de diagonaalelementen van Λ_1 reëel zijn. Bijgevolg wordt de enige oplossing van de matrixvergelijking gegeven door $\alpha_j = 0$ en besluiten we dat $A = J_n$. □

Lemma 3.3.9. *Zij $A \in \mathcal{M}_n$. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A \leq \left(\operatorname{per}(AA^T)^{1/2} \cdot \operatorname{per}(A^T A)^{1/2} \right)^{1/2},$$

met gelijkheid als en slechts als A een symmetrische positief semi-definiete matrix is.

Bewijs. We vertrekken van de polaire decompositie van $A = U\Lambda V^T \in \mathcal{M}_n$ en meer bepaald van uitdrukking (3.3.1) uit het bewijs van Stelling 3.3.7. De gestelde ongelijkheid volgt dan direct uit de standaard ongelijkheid van Cauchy-Schwarz, wanneer we ook (3.3.2) en (3.3.3) in rekening brengen. Gelijkheid is geldig als en slechts als

$$\operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(U) = c \ \operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(V), \quad \text{met } (\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \Gamma_n \text{ en } c \neq 0. \tag{3.3.9}$$

Ten gevolge van de stelling van Cauchy-Binet voor permanenten, het feit dat de permanentfunctie genormeerd is en U en V orthogonale matrices zijn, geldt ook dat

$$\sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\Gamma_n} \frac{1}{\beta_1!\cdots\beta_n!} \operatorname{per}^2 C_{\beta_1\cdots\beta_n}(U) = 1,$$
$$\sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\Gamma_n} \frac{1}{\beta_1!\cdots\beta_n!} \operatorname{per}^2 C_{\beta_1\cdots\beta_n}(V) = 1.$$

Tesamen met (3.3.9) moet $c^2 = 1$, dus $c = 1$ of $c = -1$. Als $c = -1$, dan volgt op basis van [17, Stelling 1.1] uit (3.3.9) dat $V = (-1)^{1/p}U$. Omdat we weten dat $\lambda_k = 1$ voor een zekere eigenwaarde λ_k van A, $1 \leq k \leq n$, en rekening houdend met het feit dat U en V orthogonale matrices zijn, volgt dat

$$\sqrt{n}e_k = Ve = (-1)^{1/p}Ue = (-1)^{1/p}\sqrt{n}e_k.$$

Hieruit zou volgen dat $(-1)^{1/p} = 1$, wat niet mogelijk is. Als $c = 1$, dan volgt – opnieuw op basis van [17, Stelling 1.1] uit (3.3.9) – dat $V = U$. Hiermee besluiten we het bewijs. □

Volgende observatie zal zo meteen ook nuttig blijken.

Lemma 3.3.10. *Zij $a, b \in \mathbb{N}$. Dan geldt: $\frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab}$.*

Bewijs. $(a-b)^2 \geq 0 \iff a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \iff \frac{1}{4}(a+b)^2 \geq ab \iff \frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab}$. □

Stelling 3.3.11. *Stelling 3.3.7 en Stelling 3.2.11 zijn equivalent.*

Bewijs. We tonen eerst aan dat Stelling 3.3.7 volgt uit het vermoeden van Van der Waerden. Zij hiertoe $A \in \Omega_n$ en dus ook $(AA^T)^{1/2}, (A^TA)^{1/2} \in \Omega_n$. Dan gelden de ongelijkheden

$$\operatorname{per} A \geq \frac{n!}{n^n}, \qquad \operatorname{per}(AA^T)^{1/2} \geq \frac{n!}{n^n}, \qquad \operatorname{per}(A^TA)^{1/2} \geq \frac{n!}{n^n},$$

die gelijkheden zijn als en slechts als $A = (AA^T)^{1/2} = (A^TA)^{1/2} = J_n$.
Zij nu $p \geq 0, q \geq 0$ en $p + q = 1$. Bijgevolg vinden we dat ook

$$2pq \ \operatorname{per} A \geq 2pq \ \frac{n!}{n^n}, \qquad p^2 \ \operatorname{per}(AA^T)^{1/2} \geq p^2 \ \frac{n!}{n^n}, \qquad q^2 \ \operatorname{per}(A^TA)^{1/2} \geq q^2 \ \frac{n!}{n^n}.$$

Er geldt dus:

$$p^2 \ \operatorname{per}(AA^T)^{1/2} + q^2 \ \operatorname{per}(A^TA)^{1/2} + 2pq \ \operatorname{per} A \geq (p+q)^2 \ \frac{n!}{n^n} = \frac{n!}{n^n},$$

met gelijkheid als en slechts als

$$\operatorname{per}(AA^T)^{1/2} = \operatorname{per}(A^TA)^{1/2} = \operatorname{per} A = \frac{n!}{n^n},$$

wat met het vermoeden van Van der Waerden equivalent uitgedrukt kan worden met $A = J_n$. Omgekeerd zullen we eerst bewijzen dat uit Stelling 3.3.7 volgt dat de enige oplossing van $\operatorname{per} A = \frac{n!}{n^n}$ over Ω_n gegeven wordt door $A = J_n$. We vertrekken van het feit dat

$$p^2 \ \operatorname{per}(AA^T)^{1/2} + q^2 \ \operatorname{per}(A^TA)^{1/2} + 2pq \ \operatorname{per} A = \frac{n!}{n^n}$$

enkel de triviale oplossing $A = J_n$ over Ω_n heeft. Brengen we voor alle $p, q \in [0,1]$ de aanname $q = 1-p$ in herinnering, dan verkrijgen we de volgende uitdrukking voor een willekeurige matrix $A \in \Omega_n$:

$$p^2\Big(\operatorname{per}(AA^T)^{1/2}+\operatorname{per}(A^TA)^{1/2}-2\operatorname{per} A\Big)-2p\Big(\operatorname{per}(A^TA)^{1/2}-\operatorname{per} A\Big)+\Big(\operatorname{per}(A^TA)^{1/2}-\frac{n!}{n^n}\Big) = 0$$

als en slechts als $A = J_n$. Bijgevolg moet gelden dat

$$\operatorname{per} A = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{per}(AA^T)^{1/2} + \operatorname{per}(A^TA)^{1/2}\Big), \tag{3.3.10}$$

$$\operatorname{per} A = \operatorname{per}(A^TA)^{1/2}, \tag{3.3.11}$$

$$\operatorname{per}(A^TA)^{1/2} = \frac{n!}{n^n} \tag{3.3.12}$$

als en slechts als $A = J_n$. Uit (3.3.10) en Lemma 3.3.10 halen we dat

$$\operatorname{per} A \geq \Big(\operatorname{per}(AA^T)^{1/2} \ \operatorname{per}(A^TA)^{1/2}\Big)^{1/2}.$$

Dat ook de omgekeerde ongelijkheid geldt, weten we dankzij Lemma 3.3.9 en omdat $\Omega_n \subset \mathcal{M}_n$. We besluiten dus dat

$$\operatorname{per} A = \Big(\operatorname{per}(AA^T)^{1/2} \ \operatorname{per}(A^TA)^{1/2}\Big)^{1/2},$$

wat eveneens met Lemma 3.3.9 equivalent kan worden uitgedrukt met het feit dat A een symmetrische positief semi-definiete matrix is. Bijgevolg is (3.3.11) een trivialiteit en de vergelijking $\operatorname{per} A = \frac{n!}{n^n}$, verkregen uit (3.3.11) en (3.3.12), heeft de unieke oplossing $A = J_n$ over Ω_n. Deze laatste bewering volgt immers uit Stelling 3.3.7 met $p = 1$.
Veronderstel tot slot dat de ongelijkheid uit het statement van het vermoeden van Van der Waerden niet waar is. Dan bestaat er een matrix $A \in \Omega_n$ zodanig dat

$$\operatorname{per} A < \frac{n!}{n^n}. \tag{3.3.13}$$

Het is duidelijk dat $A \neq J_n$; anders krijgen we immers een strijdigheid met het voorgaande deel in dit bewijs. Zij $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Merk op dat ook $(AA^T)^{1/2} \neq J_n$, deze matrix positief semi-definiet is, dus bovendien ook het veelvoud $(AA^T)^{2k+1} \neq J_n$ positief semi-definiet zal zijn. Bijgevolg geldt de strikte ongelijkheid

$$\operatorname{per}(AA^T)^{2k+1} > \frac{n!}{n^n} \tag{3.3.14}$$

wegens de toepassing van Stelling 3.3.7 met $p = 1$ en $q = 0$ op de positief semi-definiete vierkantswortel van $((AA^T)^{2k+1})^2$. Beschouw nu voor alle $x \in [0,1]$ de matrixfunctie

$$B(x) := (1-x)A + x(AA^T)^{2k+1}.$$

Het is duidelijk dat $B(x) \in \Omega_n$. Bovendien volgt, rekening houdende met (3.3.13) en (3.3.14), dat

$$\operatorname{per} B(0) = \operatorname{per} A < \frac{n!}{n^n}, \qquad \operatorname{per} B(1) = \operatorname{per}(AA^T)^{2k+1} > \frac{n!}{n^n}.$$

Omdat $\operatorname{per} B(x)$ in het bijzonder continu is voor alle $x \in [0,1]$, moet er wegens de gekende stelling van de tussenliggende waarde een $x_0 \in]0,1[$ bestaan zodanig dat

$$\operatorname{per} B(x_0) = \frac{n!}{n^n}.$$

Uit het voorgaande deel in dit bewijs weten we echter al dat deze vergelijking geldig is als en slechts als

$$(1 - x_0)A + x_0(AA^T)^{2k+1} = J_n.$$

Uit Lemma 3.3.8 halen we dat deze matrixvergelijking enkel de oplossing $A = J_n$ over Ω_n heeft. Dit is in strijd met de assumptie $A \neq J_n$, waarmee de stelling nu volledig bewezen is. □

Zoals eerder aangehaald biedt de aanpak van Gyires ook de mogelijkheid om het befaamde vermoeden van Van der Waerden in zekere zin te veralgemenen (zie [19, Stelling 4.3]). Hiertoe dienen eerst enkele (hulp)stellingen geformuleerd en aangetoond te worden, waarvoor we ons laten leiden door [19] en [18].

Stelling 3.3.12. *Zij $A \in \mathcal{M}_n$ en $p \in [0,1]$. Dan geldt voor alle $k = 1, \dots, n$:*

$$S_k^{(p)}(A) \geq \frac{k^2}{n},$$

met gelijkheid in de gevallen $k = 1, \dots, n-1$ als en slechts als $A = J_n$. In het geval dat $k = n$ geldt gelijkheid voor alle $A \in \mathcal{M}_n$.

Bewijs. We zullen eerst voor een willekeurige $A \in \mathcal{M}_n$ en voor elke $p \in [0,1]$ en elke $k = 1, \dots, n$ aantonen dat

$$R_k^{(p)}(A) \geq \frac{k^2}{n} T_k^{(p)}(A),$$

met gelijkheid in de gevallen $k = 1, \dots, n-1$ als en slechts als $A = J_n$. In het geval dat $k = n$ geldt gelijkheid voor alle $A \in \mathcal{M}_n$. Als we nadien nog bewijzen dat

$$T_k^{(p)}(A) > 0, \tag{3.3.15}$$

volgt het gestelde uit Definitie 3.3.5.

Merk vooreerst op dat de laatste uitspraak van de te bewijzen stelling direct volgt uit het feit dat $\operatorname{som} A = n$ voor alle $A \in \mathcal{M}_n$. We beschouwen nu analoog aan de aanzet van het bewijs van Stelling 3.3.7 de polaire decompositie van een matrix $A = (a_{ij})$ van orde n, namelijk: $A = U\Lambda V^T$, waarbij $U = (u_{ij})$ en $V = (v_{ij})$ orthogonale $n \times n$-matrices voorstellen en Λ een diagonaalmatrix is met niet-negatieve diagonaalelementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. We kunnen dan voor alle $1 \leq i, j \leq n$ schrijven:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{n} u_{is} v_{js} \lambda_s.$$

Bijgevolg geldt dat

$$\operatorname{som} A[i_1, \ldots, i_k | j_1, \ldots, j_k] = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \; x^{(s)}_{i_1 \cdots i_k} \; y^{(s)}_{j_1 \cdots j_k}, \tag{3.3.16}$$

waarbij

$$x^{(s)}_{i_1 \cdots i_k} = \sum_{\alpha=1}^{k} u_{i_\alpha, s} \qquad \text{en} \qquad y^{(s)}_{j_1 \cdots j_k} = \sum_{\alpha=1}^{k} v_{i_\alpha, s}.$$

Omdat $A \in \mathcal{M}_n$, volgt uit Stelling 1.2.7 en Opmerking 1.2.8 zonder verlies van algemeenheid dat $\lambda_1 = 1$ met bijhorende eigenvector $(1 \cdots 1)^T$. Hierdoor moet voor elke $k = 1, \ldots, n$ gelden dat $u_{k1} = v_{k1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Met behulp van (3.3.16) verkrijgen we dan dat

$$\operatorname{som} A[i_1, \ldots, i_k | j_1, \ldots, j_k] = \frac{k^2}{n} + \sum_{s=2}^{n} \lambda_s \; x^{(s)}_{i_1 \cdots i_k} \; y^{(s)}_{j_1 \cdots j_k},$$

waaruit met Definitie 3.3.1 volgt:

$$\begin{aligned} R_k(A) - \frac{k^2}{n} T_k(A) &= \sum \operatorname{per} A[i_1, \ldots, i_k | j_1, \ldots, j_k] \left(\operatorname{som} A[i_1, \ldots, i_k | j_1, \ldots, j_k] - \frac{k^2}{n} \right) \\ &= \sum \operatorname{per} A[i_1, \ldots, i_k | j_1, \ldots, j_k] \sum_{s=2}^{n} \lambda_s \; x^{(s)}_{i_1 \cdots i_k} \; y^{(s)}_{j_1 \cdots j_k} \\ &= \sum_{s=2}^{n} \lambda_s Q_s(A), \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

waarbij

$$Q_s(A) := \sum \operatorname{per} A[i_1, \ldots, i_n | j_1, \ldots, j_n] \; x^{(s)}_{i_1 \cdots i_k} \; y^{(s)}_{j_1 \cdots j_k}$$

en er gesommeerd wordt over de combinaties $(i_1, \ldots, i_n)$ en $(j_1, \ldots, j_n)$ die onafhankelijk van elkaar lopen over $Q_{n,k}$. Brengen we Notatie 3.3.3(iii) en meer bepaald uitdrukking (3.3.1) in herinnering, samen met het feit dat uit de polaire decompositie van A ook volgt dat

$$A[i_1, \ldots, i_k | j_1, \ldots, j_k] = U[i_1, \ldots, i_k | 1, \ldots, n] \cdot \Lambda \cdot V^T[j_1, \ldots, j_k | 1, \ldots, n],$$

dan bekomen we:

$$\begin{aligned} &\operatorname{per} A[i_1, \ldots, i_k | j_1, \ldots, j_k] \\ &= \sum_{(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \Gamma_n} \frac{\lambda_1^{\beta_1} \cdots \lambda_n^{\beta_n}}{\beta_1! \cdots \beta_n!} \operatorname{per} C_{\beta_1 \cdots \beta_n}(U[i_1, \ldots, i_k | 1, \ldots, n]) \; \operatorname{per} C_{\beta_1 \cdots \beta_n}(V[j_1, \ldots, j_k | 1, \ldots, n]). \end{aligned}$$

Met deze toepassing van de expansieformule van Cauchy-Binet kunnen we nu ook schrijven dat

$$\begin{aligned} Q_s(A) = \sum_{(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \Gamma_n} \frac{\lambda_1^{\beta_1} \cdots \lambda_n^{\beta_n}}{\beta_1! \cdots \beta_n!} & \left(\sum_{(i_1, \ldots, i_k) \in Q_{k,n}} \operatorname{per} C_{\beta_1 \cdots \beta_n}(U[i_1, \ldots, i_k | 1, \ldots, n]) \; x^{(s)}_{i_1 \cdots i_k} \right) \cdot \\ & \left(\sum_{(i_1, \ldots, i_k) \in Q_{k,n}} \operatorname{per} C_{\beta_1 \cdots \beta_n}(V[i_1, \ldots, i_k | 1, \ldots, n]) \; y^{(s)}_{i_1 \cdots i_k} \right). \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

We bekijken nu welke bijdrage het geval $\beta_1 = k$ tot (3.3.18) levert. Stel daartoe dat $s \geq 2$ en $\beta_1 = k$. In dat geval verkrijgen we:

$$\begin{aligned} &\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in Q_{k,n}} \operatorname{per} C_{\beta_1=k}(U[i_1,\ldots,i_k|1,\ldots,n])\ x^{(s)}_{i_1\cdots i_k} \\ &\qquad = k!\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k \binom{n-1}{k-1}(u_{1s}+\ldots+u_{ks}) = 0, \end{aligned}$$

waarbij de laatste gelijkheid geldt omdat in het geval dat $s \geq 2$ de vector $(u_{1s},\ldots,u_{ks})$ orthogonaal staat op de k-dimensionale vector $(u_{i_1,1},\ldots,u_{i_k,1})$ met elementen $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
We gaan vervolgens na welke bijdrage het geval $\beta_1 = k-1$ tot (3.3.18) levert. Stel daartoe $\beta_s = 1$ voor alle $2 \leq s \leq n$ en $\beta_1 = k-1$; dan vinden we dat

$$\operatorname{per} C_{\beta_1=k-1,\beta_s=1}(U[i_1,\ldots,i_k|1,\ldots,n]) = (k-1)!\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k (u_{i_1,s}+\ldots+u_{i_k,s})$$

en bijgevolg

$$\operatorname{per} C_{\beta_1=k-1,\beta_s=1}(U[i_1,\ldots,i_k|1,\ldots,n])\ x^{(s)}_{i_1\cdots i_k} = (k-1)!\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k (u_{i_1,s}+\ldots+u_{i_k,s})^2.$$

We kunnen dus schrijven dat

$$\begin{aligned} Q_s(A) = \big((k-1)!\big)^2\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\cdot\lambda_s\cdot &\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in Q_{k,n}}(u_{i_1,s}+\ldots+u_{i_k,s})^2\cdot \\ &\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in Q_{k,n}}(v_{i_1,s}+\ldots+v_{i_k,s})^2+\rho_s(A), \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

waarbij we $\rho_s(A)$ kunnen halen uit (3.3.18), met de sommatie over $(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\Gamma_n$ beperkt tot $\beta_1 \leq k-2$. We beweren nu dat

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in Q_{k,n}}(u_{i_1,s}+\ldots+u_{i_k,s})^2 > 0. \tag{3.3.20}$$

Als dit immers niet het geval zou zijn, dan zou $u_{i_1,s}+\ldots+u_{i_k,s}=0$ voor alle $(i_1,\ldots,i_k)\in Q_{k,n}$ en dus zou $u_{is}=0$ voor alle $i=1,\ldots,n$; omdat $1\leq k\leq n-1$, zou dit in strijd zijn met de orthogonaliteit van U.
We keren nu terug naar uitdrukking (3.3.17), waaruit we voor alle $p,q\geq 0$ met $p+q=1$ halen dat

$$R_k^{(p)}(A)-\frac{k^2}{n}T_k^{(p)}(A)=\sum_{s=2}^n\lambda_s Q_s^{(p)}(A),$$

met

$$Q_s^{(p)}(A)=p^2\ Q_s((AA^T)^{1/2})+q^2\ Q_s((A^TA)^{1/2})+2pq\ Q_s(A).$$

Rekening houdend met (3.3.19), kunnen we dan schrijven:

$$Q_s(A)=\big((k-1)!\big)^2\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\cdot\lambda_s\cdot$$

$$\left[p \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in Q_{k,n}} (u_{i_1,s}+\ldots+u_{i_k,s})^2 + q \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in Q_{k,n}} (v_{i_1,s}+\ldots+v_{i_k,s})^2\right]^2$$

$$+ \sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\Gamma_n} \frac{\lambda_1^{\beta_1}\cdots\lambda_n^{\beta_n}}{\beta_1!\cdots\beta_n!} \Bigg(p \cdot \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in Q_{k,n}} \operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(U[i_1,\ldots,i_k|1,\ldots,n])\; x^{(s)}_{i_1\cdots i_k}$$

$$+ q \cdot \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in Q_{k,n}} \operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(V[i_1,\ldots,i_k|1,\ldots,n])\; y^{(s)}_{i_1\cdots i_k} \Bigg)^2,$$

waarbij de sommatie over $(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\Gamma_n$ beperkt is tot $\beta_1 \le k-2$.
Uit (3.3.20) halen we dat de som tussen vierkante haken in bovenstaande uitdrukking positief is voor alle $p\in[0,1]$. Bijgevolg is de eerste term gelijk aan nul als en slechts als $\lambda_s = 0$. De tweede term is niet-negatief en gelijk aan nul als $\lambda_s = 0$ voor alle $s = 2,\ldots,n$, aangezien we weten dat $\lambda_1 = 1$. We besluiten dus dat

$$R_k^{(p)}(A) - \frac{k^2}{n} T_k^{(p)}(A) = \sum_{s=2}^{n} \lambda_s Q_s^{(p)}(A) \ge 0,$$

waarmee het eerste deel van dit bewijs is voltooid.
Voor het tweede luik van het bewijs baseren we ons op de volgende uitdrukking, verkregen op basis van (3.3.18):

$$T_k^{(p)}(A) = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_k)\in Q_{k,n}\\(j_1,\ldots,j_k)\in Q_{k,n}}} \sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\Gamma_n} \frac{\lambda_1^{\beta_1}\cdots\lambda_n^{\beta_n}}{\beta_1!\cdots\beta_n!} \Bigg(p\cdot \operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(U[i_1,\ldots,i_k|1,\ldots,n])$$

$$+ q\cdot \operatorname{per} C_{\beta_1\cdots\beta_n}(V[j_1,\ldots,j_k|1,\ldots,n]) \Bigg)^2.$$

Beschouw nu het geval dat $\beta_1 = k$. Dan vinden we $\lambda_1 = 1$ en alle elementen van $U[i_1,\ldots,i_k|1,\ldots,n]$ en $V[j_1,\ldots,j_k|1,\ldots,n]$ zijn gelijk aan $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Hieruit halen we:

$$T_k^{(p)}(A) \ge \binom{n}{k}^2 \frac{k!}{n^k} > 0, \tag{3.3.21}$$

waarmee we de gestelde ongelijkheid volledig hebben aangetoond.
We tonen tot slot de gevallen van gelijkheid aan. Stel hiertoe eerst $A = J_n$. Merk op dat $(i_1,\ldots,i_k),(j_1,\ldots,j_k) \in Q_{k,n}$ en $Q_{k,n}$ per definitie $\binom{n}{k}$ stijgende rijen bevat, voor alle $k = 1,\ldots,n$. We weten al dat het aantal termen dat $T_k(J_n)$ en wegens Opmerking 3.3.6 ook $T_k^{(p)}(J_n)$ bevat, gelijk is aan $\binom{n}{k}^2$. Wegens de gedaante van J_n is het duidelijk dat de permanent van elke deelmatrix van J_n die in elk van deze termen wordt berekend, gelijk is aan $k!\left(\frac{1}{n}\right)^k$.
Er geldt dus:

$$T_k^{(p)}(J_n) = \binom{n}{k}^2 \frac{k!}{n^k}. \tag{3.3.22}$$

Merk op dat som $J_n[i_1,\ldots,i_k|j_1,\ldots,j_k] = \frac{k^2}{n}$; dan vinden we met een analoge redenering dat

$$R_k^{(p)}(J_n) = \binom{n}{k}^2 \frac{k!}{n^k}\frac{k^2}{n}$$

en bijgevolg:

$$S_k^{(p)}(J_n) = \frac{k^2}{n}.$$

Als omgekeerd de gelijkheid in het statement van deze stelling geldt voor alle $k = 1, \ldots, n-1$, dan volgt uit bovenstaande argumenten ook dat $A = J_n$. Het is tot slot duidelijk dat

$$S_n^{(p)}(A) = \frac{n^2}{n} = n$$

voor alle $A \in \mathcal{M}_n$. □

Bovenstaand bewijs levert met (3.3.21) in het bijzonder reeds een interessante ongelijkheid met betrekking tot $T_k^{(p)}(A)$ op. We zullen ook op een alternatieve manier naar deze ongelijkheid toewerken (zie Stelling 3.3.18), om bij deze uiteenzetting geïnspireerd op het werk van Gyires eveneens enkele andere vernoemenswaardige ongelijkheden en identiteiten te kunnen betrekken.

Lemma 3.3.13. *Zij $A \in \mathcal{M}_n$. Dan geldt voor alle $k = 1, \ldots, n$:*

$$T_{k+1}(A) = \frac{1}{k+1}\Big((n-2k)T_k(A) + R_k(A)\Big).$$

Bewijs. Zij $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$. Noteer met $\mathcal{V}_k$ de verzameling van variaties van orde k van de elementen $1, \ldots, n$ zonder herhaling. Bijgevolg kunnen we schrijven dat

$$T_k(A) = \frac{1}{k!}\sum \operatorname{per} A[i_1, \ldots, i_n | j_1, \ldots, j_n], \tag{3.3.23}$$

waarbij in de sommatie $(i_1, \ldots, i_n)$ en $(j_1, \ldots, j_n)$ onafhankelijk lopen over $\mathcal{V}_k$. Merk op dat dit inderdaad in overeenstemming is met Definitie 3.3.1. Geheel analoog kunnen we ook $T_{k+1}(A)$ uitdrukken. De som σ van de termen die het product $a_{11}\cdots a_{kk}$ bevatten is dan gelijk aan

$$\sigma := a_{11}\cdots a_{kk}\big((a_{k+1,k+1} + \ldots + a_{n,k+1}) + \ldots + (a_{k+1,n} + \ldots + a_{nn})\big).$$

Door tweemaal expliciet in rekening te brengen dat $A \in \mathcal{M}_n$ vinden we, afgewisseld met herformuleringen:

$$\begin{aligned}
\sigma &= a_{11}\cdots a_{kk}\Big(\big(1 - (a_{1,k+1} + \ldots + a_{k,k+1})\big) + \ldots + \big(1 - (a_{1n} + \ldots + a_{kn})\big)\Big) \\
&= a_{11}\cdots a_{kk}\Big(n - k - \big((a_{1,k+1} + \ldots + a_{1n}) + \ldots + (a_{k,k+1} + \ldots + a_{kn})\big)\Big) \\
&= a_{11}\cdots a_{kk}\Big(n - k - \big(1 - (a_{11} + \ldots + a_{1k})\big) - \ldots - \big(1 - (a_{k1} + \ldots + a_{kk})\big)\Big) \\
&= a_{11}\cdots a_{kk}\big(n - 2k + \operatorname{som} A[1, \ldots, k|1, \ldots, k]\big).
\end{aligned}$$

Wanneer we dit principe veralgemenen, kunnen we met het oog op de formulering van $T_{k+1}(A)$ zoals in (3.3.23) schrijven dat in $T_{k+1}(A)$ de som van de termen die de factor $\operatorname{per} A[1, \ldots, k|1, \ldots, k]$ bevatten gelijk is aan

$$\operatorname{per} A[1, \ldots, k|1, \ldots, k]\big(n - 2k + \operatorname{som} A[1, \ldots, k|1, \ldots, k]\big).$$

Analoog geldt dat in $T_{k+1}(A)$ de som van de termen die de factor $\operatorname{per} A[i_1, \ldots, i_k|j_1, \ldots, j_k]$ bevatten gelijk is aan

$$\operatorname{per} A[i_1, \ldots, i_k|j_1, \ldots, j_k]\big(n - 2k + \operatorname{som} A[i_1, \ldots, i_k|j_1, \ldots, j_k]\big).$$

We besluiten hieruit dat

$$T_{k+1}(A) = \frac{1}{k+1}\sum \operatorname{per} A[i_1,\ldots,i_k|j_1,\ldots,j_k]\big(n-2k+\operatorname{som} A[i_1,\ldots,i_k|j_1,\ldots,j_k]\big),$$

waarbij in de sommatie $(i_1,\ldots,i_n)$ en $(j_1,\ldots,j_n)$ onafhankelijk lopen over $\mathcal{V}_k$. Met behulp van Definitie 3.3.1 volgt het gestelde. $\square$

Brengen we nu ook Definitie 3.3.5 in herinnering, bekomen we een logisch gevolg van het vorige lemma.

Gevolg 3.3.14. *Zij $A \in \mathcal{M}_n$ en zij $p \in [0,1]$. Dan geldt voor alle $k = 1,\ldots,n-1$:*

$$T^{(p)}_{k+1}(A) = \frac{1}{k+1}\Big((n-2k)T^{(p)}_k(A) + R^{(p)}_k(A)\Big).$$

Bewijs. Geheel analoog aan het bewijs van het voorgaande lemma. $\square$

Voor de volledigheid van deze sectie halen we uit Lemma 3.3.13 en Gevolg 3.3.14 nog de volgende identiteiten.

Gevolg 3.3.15. *Zij respectievelijk $A \in \Omega_n$ en $A \in \mathcal{M}_n$. Dan geldt respectievelijk:*

$$\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)P_k(A) = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(A)$$

en

$$\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)P^{(p)}_k(A) = \sum_{k=1}^{n-1} S^{(p)}_k(A).$$

Bewijs. Geheel analoog aan het bewijs van (3.3.15) volgt dat $T_k(A) > 0$ voor alle $k = 1,\ldots,n-1$ en een willekeurige $A \in \Omega_n$, dus in het bijzonder geldt $T_k(A) \neq 0$. Uit Lemma 3.3.13 en Definitie 3.3.1 volgt dan:

$$(k+1)\frac{T_{k+1}(A)}{T_k(A)} = n-2k+\frac{R_k(A)}{T_k(A)} \iff (k+1)P_k(A) = n-2k+S_k(A).$$

Bijgevolg geldt ook

$$(n-k+1)P_{n-k}(A) = n-2(n-k)+S_{n-k}(A) = -n+2k+S_{n-k}(A)$$

en we vinden dat

$$(k+1)P_k(A) + (n-k+1)P_{n-k}(A) = S_k(A) + S_{n-k}(A).$$

Geheel analoog vinden we voor een willekeurige $A \in \mathcal{M}_n$ dat

$$(k+1)P^{(p)}_k(A) = n-2k+S^{(p)}_k(A),$$

waaruit

$$(k+1)P^{(p)}_k(A) + (n-k+1)P^{(p)}_{n-k}(A) = S^{(p)}_k(A) + S^{(p)}_{n-k}(A).$$

Het resultaat volgt nu met recursie. $\square$

In een volgende fase zullen we aantonen dat de ongelijkheid uit de volgende stelling equivalent is met de ongelijkheid uit Stelling 3.3.12.

Stelling 3.3.16. *Zij $A \in \mathcal{M}_n$ en $p \in [0,1]$. Dan geldt voor alle $k = 1, \ldots, n-1$:*

$$P_k^{(p)}(A) \geq \frac{(n-k)^2}{n(k+1)},$$

met gelijkheid als en slechts als $A = J_n$.

Stelling 3.3.17. *Stelling 3.3.12 en Stelling 3.3.16 zijn equivalent.*

Bewijs. Zij $A \in \mathcal{M}_n$ en $p \in [0,1]$. Door toepassing van Definitie 3.3.5, Gevolg 3.3.14 en rekenwerk vinden we voor alle $k = 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned}
P_k^{(p)}(A) \geq \frac{(n-k)^2}{n(k+1)} &\iff \frac{\frac{1}{k+1}\Big((n-2k)T_k^{(p)}(A) + R_k^{(p)}(A)\Big)}{T_k^{(p)}(A)} \geq \frac{(n-k)^2}{n(k+1)} \\
&\iff (n-2k) + S_k^{(p)}(A) \geq \frac{(n-k)^2}{n} \\
&\iff S_k^{(p)}(A) \geq \frac{n^2 - 2kn + k^2}{n} - n + 2k \\
&\iff S_k^{(p)}(A) \geq \frac{k^2}{n}.
\end{aligned}$$

We beschouwen nu het geval van gelijkheid in Stelling 3.3.16. Uit Opmerking 3.3.6 en (3.3.22) volgt dat

$$P_k^{(p)}(J_n) = P_k(J_n) = \frac{\binom{n}{k+1}^2 \frac{(k+1)!}{n^{k+1}}}{\binom{n}{k}^2 \frac{k!}{n^k}} = \frac{((n-k)!)^2}{((n-(k+1))!)^2}\frac{n^k}{n^{k+1}}\frac{k!}{(k+1)!} = \frac{(n-k)^2}{n(k+1)}.$$

In het geval dat

$$P_k^{(p)}(A) = \frac{(n-k)^2}{n(k+1)},$$

moet omgekeerd ook gelden dat $A = J_n$. Het geval van gelijkheid indachtig van Stelling 3.3.12 voor alle $k = 1, \ldots, n-1$, besluiten we het bewijs. □

Stelling 3.3.18. *Zij $A \in \mathcal{M}_n$. Dan geldt:*

$$T_k^{(p)}(A) \geq \binom{n}{k}^2 \frac{k!}{n^k},$$

met gelijkheid als en slechts als $A = J_n$.

Bewijs. We beweren dat voor een willekeurige $A \in \mathcal{M}_n$ en voor elke $p \in [0,1]$ en elke $k = 1, \ldots, n-1$ geldt:

$$T_k^{(p)}(A) = T_1(A) \prod_{i=1}^{k-1} P_i^{(p)}(A) \tag{3.3.24}$$

en gaan daarvoor eerst na dat $T_1^{(p)}(A) = T_1(A)$, voor alle $p \in [0,1]$.
We vinden uit de definities en voor alle $q \geq 0$ waarvoor $p + q = 1$:

$$T_1^{(p)}(A) = p^2\, T_1((AA^T)^{1/2}) + q^2\, T_1((A^TA)^{1/2}) + 2pq\, T_1(A)$$

$$
\begin{aligned}
&= p^2 \ \operatorname{per}((AA^T)^{1/2}[i_1|j_1]) + q^2 \ \operatorname{per}((A^TA)^{1/2}[i_1|j_1]) + 2pq\ T_1(A) \\
&= (p^2 + q^2 + 2pq)T_1(A) \\
&= T_1(A),
\end{aligned}
$$

waarbij de derde gelijkheid inzichtelijk volgt omdat binnen de permanenten de sommatie loopt over alle elementen van de beschouwde matrix en omdat in het bijzonder ook $AA^T, A^TA \in \mathcal{M}_n$. Bijgevolg geldt:

$$
\begin{aligned}
T_k^{(p)}(A) &= T_1(A)\frac{T_2(p)(A)}{T_1^{(p)}(A)}\frac{T_3^{(p)}(A)}{T_2^{(p)}(A)}\cdots\frac{T_k^{(p)}(A)}{T_{k-1}^{(p)}(A)} \\
&= T_1(A)P_1^{(p)}(A)\cdots P_k^{(p)}(A) \\
&= T_1(A)\prod_{i=1}^{k-1} P_i^{(p)}(A).
\end{aligned}
$$

Gebruik makende van de ongelijkheid uit Stelling 3.3.16 vinden we voor elke $k = 1, \dots, n-1$:

$$
\prod_{i=1}^{k-1} P_i^{(p)}(A) \geq \frac{(n-1)^2(n-2)^2\cdots(n-k+1)^2}{2n\ 3n\cdots kn}\cdot\frac{n^2}{n^2} = \frac{(n!)^2}{((n-k)!)^2}\frac{1}{n^{k+1}\ k!}
$$

en samen met de zonet bewezen identiteit (3.3.24) geldt:

$$
T_k^{(p)}(A) \geq T_1(A)\frac{(n!)^2}{((n-k)!)^2\ n^{k+1}\ k!}.
$$

Houden we tot slot rekening met het feit dat $T_1(A) = n$ omdat elke rijsom en elke kolomsom van A gelijk is aan 1, besluiten we dat

$$
T_k^{(p)}(A) \geq \frac{(n!)^2}{((n-k)!)^2\ n^k\ k!} = \binom{n}{k}^2\frac{k!}{n^k}.
$$

Het geval van gelijkheid werd reeds bewezen: zie (3.3.22). □

We zijn aanbeland bij de beloofde stelling. Merk op dat we voor $k = n$ precies Stelling 3.2.11 bekomen en we daarom dus kunnen spreken van een veralgemening.

Gevolg 3.3.19. *Zij $A \in \Omega_n$. Dan geldt dat $T_1(A) = n$ en voor alle $k = 2, \dots, n$:*

$$
T_k(A) \geq \binom{n}{k}^2\frac{k!}{n^k},
$$

met gelijkheid als en slechts als $A = J_n$.

Bewijs. We zullen aantonen dat deze stelling volgt uit Stelling 3.3.18. Geheel analoog aan Stelling 3.3.12 kan worden nagegaan dat voor alle $k = 1, \dots, n$ geldt dat

$$
S_k(A) \geq \frac{k^2}{n}
$$

en dat analoog aan Stelling 3.3.17 deze ongelijkheid, voor alle $k = 1, \dots, n-1$, equivalent is met

$$
P_k(A) \geq \frac{(n-k)^2}{n(k+1)}.
$$

Met behulp van het analogon van identiteit (3.3.24), namelijk

$$T_k(A) = T_1(A) \prod_{i=1}^{k-1} P_i(A),$$

en de gelijkaardige daarop volgende beschouwingen zoals in het bewijs van Stelling 3.3.18, volgt het gewenste resultaat. □

3.4 Vermoeden van Dittert

Een ander vermoeden met betrekking tot permanenten kan worden gezien als een uitbreiding van het vermoeden van Van der Waerden naar vierkante matrices van orde n waarvoor de som van alle elementen gelijk is aan n.

Notatie 3.4.1. (i) Met K_n noteren we de verzameling van alle $n \times n$-matrices (a_{ij}) waarvoor $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = n$.

(ii) Met ϕ noteren we de reëelwaardige functie gedefinieerd op K_n door

$$\phi(A) := \prod_{i=1}^{n} r_i + \prod_{j=1}^{n} c_j - \operatorname{per} A,$$

waarbij $r_1, \ldots, r_n$ en $c_1, \ldots, c_n$ respectievelijk de rij- en kolomsommen van A voorstellen.

In 1983 werd het volgende vermoeden door de Amerikaan Eric Dittert geformuleerd.

Vermoeden 3.4.2 (Dittert).

$$\max_{A \in K_n} \phi(A) = 2 - \frac{n!}{n^n}$$

en het maximum op K_n wordt enkel bereikt voor $A = J_n$.

Een algemeen bewijs voor de bewering bleef tot nu toe uit. Wel werd een bewijs gevonden voor $n = 2$ door Richard Sinkhorn (zie [45]) en voor $n = 3$ door de Koreaanse wiskundige Suk Geun Hwang (zie [27, Theorem 3]). We zullen beide gevallen in detail bestuderen.

3.4.1 Het geval $n = 2$

Het vermoeden van Dittert laat zich voor alle $A \in K_n$ equivalent uitdrukken als

$$\operatorname{per} A - \frac{n!}{n^n} - \prod_{i=1}^{n} r_i - \prod_{j=1}^{n} c_j + 2 \geq 0, \tag{3.4.1}$$

met gelijkheid als en slechts als $A = J_n$.
Merk op dat voor $n = 1$ het vermoeden triviaal waar is, want per $A = 1$.
Zij nu $A \in K_2$. Dan kunnen we A schrijven als

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 2 - x - y - z \end{pmatrix}.$$

Met wat rekenwerk volgt nu:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{per} A - \frac{2!}{2^2} - r_1 r_2 - c_1 c_2 + 2 \\
&= x(2-x-y-z) + yz - \frac{1}{2} - (x+y)(2-x-y) - (x+z)(2-x-z) + 2 \\
&= 2x - x^2 - xy - xz + yz - \frac{1}{2} - 2x - 2y + x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2z + 2xz + z^2 + 2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz - 2x - 2y - 2z + \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{18}\left(18x^2 + 18xy + 18y^2 + 18xz + 18yz - 36x - 36y + 18z^2 - 36z + 27\right) \\
&= \frac{1}{18}\left(\left((4x+y)+(z-3)\right)^2 + \left((x+4y)+(z-3)\right)^2 + \left((x+y)+(4z-3)\right)^2\right).
\end{aligned}$$

We zien dat het rechterlid altijd niet-negatief is en gelijk is aan nul als en slechts als

$$\begin{cases} 4x+y+z-3=0 \\ x+4y+z-3=0 \\ x+y+4z-3=0 \end{cases} \iff x=y=z=\frac{1}{2} \iff A = J_2.$$

Hiermee is (3.4.1) aangetoond voor $n=2$.

3.4.2 Het geval $n = 3$

Definitie 3.4.3. We noemen $A \in K_n$ een **ϕ-maximaliserende matrix** als $\phi(A) \geq \phi(X)$ voor alle $X \in K_n$.

Met deze invoering kunnen we Vermoeden 3.4.2 ook formuleren als volgt:

$$J_n \text{ is de unieke } \phi\text{-maximaliserende matrix in } K_n. \tag{3.4.2}$$

Tot het bewijs van het vermoeden van Dittert voor een ander geval dan $A \in K_2$ komt Sinkhorn in [45] uit 1984 niet. Hij bewijst in dit werk (op een zeer technische manier) wel nog dat elke ϕ-maximaliserende matrix in K_n een positieve permanent heeft. Hiermee hoopt Sinkhorn een stap te zetten in de richting van een algemeen bewijs, aangezien het vermoeden van Dittert kan worden beschouwd als een uitbreiding van het vermoeden van Van der Waerden en we dankzij Stelling 2.5.5 reeds weten dat elke matrix in Ω_n een positieve permanent heeft.
Denkpistes in deze richting werden door andere wiskundigen echter niet expliciet gevolgd. Drie jaar later slaagt Hwang er in om in [27, Theorem 3] een bewijs te geven voor $A \in K_3$, waarbij hij vooral teruggrijpt naar eigen (hulp)resultaten uit [26], dat een jaar eerder gepubliceerd werd.

Notatie 3.4.4. (i) Met E_{ij} noteren we de binaire matrix met alle elementen gelijk aan 0, behalve het element op positie (i,j), dat gelijk is aan 1.

(ii) Zij $A \in K_n$ en laat $r_1, \ldots, r_n$ en $c_1, \ldots, c_n$ respectievelijk de rij- en kolomsommen voorstellen van A. Voor alle $1 \leq i,j \leq n$ definiëren we $\phi_{ij}(A)$ door

$$\begin{aligned}
\phi_{ij}(A) &:= r_1 \cdots r_{i-1} r_{i+1} \cdots r_n + c_1 \cdots c_{j-1} c_{j+1} \cdots c_n - \operatorname{per} A(i|j) \\
&:= \overline{r_i} + \overline{c_j} - \operatorname{per} A(i|j).
\end{aligned}$$

Lemma 3.4.5. *Zij $A = (a_{ij}) \in K_n$ een ϕ-maximaliserende matrix. Dan geldt:*

(i) $\phi_{ij}(A) = \phi_{kl}(A)$ *als* $a_{ij} > 0$ *en* $a_{kl} > 0$*;*

(ii) $\phi_{ij}(A) \leq \phi_{kl}(A)$ *als* $a_{ij} = 0$ *en* $a_{kl} > 0$.

Bewijs. (i) Zij $\epsilon \in \mathbb{R}$ willekeurig met $|\epsilon|$ voldoende klein. Definieer $A_\epsilon := A + \epsilon(E_{ij} - E_{kl})$. Er volgt direct dat ook $A_\epsilon \in K_n$. Per definitie van ϕ, ϕ_{ij} en met ontwikkeling van de permanent volgt bovendien dat

$$\phi(A_\epsilon) = \phi(A) + \epsilon\,(\phi_{ij}(A) - \phi_{kl}(A)) + O(\epsilon^2).$$

Omdat ϵ^2 verwaarloosbaar klein is en $\phi(A_\epsilon) = \phi(A)$, volgt dat $\phi_{ij}(A) = \phi_{kl}(A)$, waarmee de uitspraak aangetoond is.

(ii) Zij $\epsilon > 0$ willekeurig en voldoende klein. Analoog als in puntje (i) en wetende dat $a_{ij} = 0$ vinden we dan dat $A_\epsilon \in K_n$ en $\phi_{ij}(A) - \phi_{kl}(A) \leq 0$. □

Stelling 3.4.6. *Zij* $A = (a_{ij}) \in K_n$ *een* ϕ*-maximaliserende matrix. Dan geldt:*

(i) $\phi_{ij}(A) = \phi_{kl}(A)$ *als* $a_{ij} > 0$*;*

(ii) $\phi_{ij}(A) \leq \phi_{kl}(A)$ *als* $a_{ij} = 0$.

Bewijs. (i) Veronderstel dat $a_{ij} > 0$. Voor alle posities (k,l) met $a_{kl} > 0$ weten we uit Lemma 3.4.5(i) dat $\phi_{ij}(A) = \phi_{kl}(A)$. Bijgevolg geldt voor alle $k, l = 1, \ldots, n$ ook dat

$$a_{kl}\phi_{ij}(A) = a_{kl}\phi_{kl}(A), \qquad \text{of nog: } a_{kl}\phi_{ij}(A) = a_{kl}\overline{r_k} + a_{kl}\overline{c_l} - a_{kl}\operatorname{per} A(k|l).$$

Wanneer we nu sommeren over alle k en l en de betekenis van K_n in rekening brengen, krijgen we:

$$\begin{aligned}
n\phi_{ij}(A) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\overline{r_k} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\overline{c_l} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\operatorname{per} A(k|l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} r_k\overline{r_k} + \sum_{l=1}^{n} c_l\overline{c_l} - n\operatorname{per} A \\
&= \sum_{k=1}^{n} r + \sum_{l=1}^{n} c - n\operatorname{per} A \\
&= n(r + c - \operatorname{per} A) \\
&= n\phi(A),
\end{aligned}$$

waarbij $r := r_1 \cdots r_n$ en $c := c_1 \cdots c_n$. Het gestelde volgt.

(ii) Analoog als puntje (i), op basis van Lemma 3.4.5(ii). □

Opmerking 3.4.7. Als de matrix A uit Stelling 3.4.6 in het bijzonder dubbelstochastisch is, dan drukken de veronderstellingen $\phi_{ij}(A) = \phi(A)$ en $\operatorname{per} A(i|j) = \operatorname{per} A$ hetzelfde uit, alsook $\phi_{ij}(A) \leq \phi(A)$ en $\operatorname{per} A(i|j) \geq \operatorname{per} A$. Dit volgt onmiddellijk uit het feit dat elke rij- en kolomsom van A gelijk is aan 1.

Een gelijkaardig resultaat als het substitutieprincipe voor matrices in Ω_n bestaat ook voor matrices in K_n, mits een extra voorwaarde. Een bewijs ervan is terug te vinden in [26, Lemma 4]. Merk voor de volledigheid op dat een analoge uitspraak van de volgende hulpstelling ook geldt met betrekking tot de rijen in plaats van de kolommen van de beschouwde matrix.

Definitie 3.4.8. We zeggen dat twee matrices A en B met dezelfde dimensies een **gelijk nulpatroon** hebben als A en B hun nulelementen op dezelfde posities hebben.

Lemma 3.4.9. *Zij $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in K_n$ een ϕ-maximaliserende matrix en zij A' de matrix verkregen uit A door zowel $\mathbf{a}_s$ als $\mathbf{a}_t$ te vervangen door $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_s + \mathbf{a}_t)$, voor zekere $1 \leq s < t \leq n$. Als $\mathbf{a}_s$ en $\mathbf{a}_t$ dezelfde kolomsom of hetzelfde nulpatroon hebben, dan is ook A' een ϕ-maximaliserende matrix in K_n.*

Ook de volgende hulpstelling (zie [25, Lemma 5] voor een bewijs) zal binnenkort meermaals nuttig blijken.

Lemma 3.4.10. *Zij A en B ϕ-maximaliserende matrices in K_n met hetzelfde nulpatroon. Als $\phi(tA + (1-t)B)$ een veelterm is in t van graad hoogstens 3, dan is $tA + (1-t)B$ een ϕ-maximaliserende matrix voor elke t.*

Merk als laatste voorbeschouwing op dat een zeer interessant resultaat uit [26, Theorem 1] luidt:

Stelling 3.4.11. *Zij $A \in K_n$ een positieve ϕ-maximaliserende matrix. Dan geldt: $A = J_n$.*

Het grootste werk van het bewijs van het vermoeden van Dittert voor $n = 3$ schuilt in het aantonen van de volgende uitspraak. Hierbij wordt de gedaante van de beschouwde 3×3-matrix stapsgewijs verfijnd door gevallen uit te sluiten met behulp van vele kleine bewijzen uit het ongerijmde.

Lemma 3.4.12. *Zij A een ϕ-maximaliserende matrix in K_3. Dan is A volledig niet-decomposeerbaar.*

Bewijs. Zij $A = (a_{ij})$ een ϕ-maximaliserende matrix in K_3 en noteer $R_A = (r_1, r_2, r_3)$ en $C_A = (c_1, c_2, c_3)$. Veronderstel dat A gedeeltelijk decomposeerbaar is. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we dan aannemen dat $a_{12} = a_{13} = 0$.
We beweren nu dat $a_{11} > 0$. Als $a_{11} = 0$, bekomen we dat $\phi(A) = c_1c_2c_3 \leq 1$. We halen nu een contradictie uit het feit dat A ϕ-maximaliseerbaar is en er een matrix $X \in K_3$ bestaat waarvoor $\phi(A) < \phi(X)$; voor $X = J_3$ geldt namelijk dat $\phi(J_3) = 1 + 1 - \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$.
Vervolgens beweren we dat a_{21} en a_{31} niet beiden gelijk zijn aan nul. Veronderstel uit het ongerijmde dat $a_{21} = a_{31} = 0$. Noteer $B := A(1|1)$ en $a := a_{11}$. We kunnen dan schrijven dat $A = aI_1 \dot{+} B$, waaruit volgt dat $\phi(A) = a\phi(B)$ en $\phi_{11}(A) = \phi(B)$. Omdat $a_{11} > 0$, kunnen we Stelling 3.4.6 toepassen en vinden we dat $\phi_{11}(A) = \phi(A)$. Er volgt dat $a = 1$ en dus $B \in K_2$. Uit de reeds bewezen geldigheid van Vermoeden 3.4.2 voor $n = 2$ weten we dat $B = J_2$. Door ontwikkeling van A naar de eerste rij en de eerste kolom volgt dan echter dat $\phi(A) = \phi(B) = \phi(J_2) < \phi(J_3)$, strijdig met de ϕ-maximaliteit van A op K_3. We besluiten dat $(a_{21}, a_{31}) \neq (0, 0)$.
We tonen nu aan dat precies een van beide elementen a_{21} of a_{31} gelijk is aan nul. Veronderstel hiertoe dat $a_{21} > 0$ en $a_{31} > 0$. Uit Lemma 3.4.5(i) halen we dat $\phi_{21}(A) = \phi_{31}(A)$, dus $0 = \phi_{21}(A) - \phi_{31}(A) = r_1r_3 + c_2c_3 - 0 - (r_1r_2 + c_2c_3 - 0) = r_1(r_3 - r_2)$. Omdat $a = r_1 > 0$, volgt dat $r_3 = r_2$. Gebruik makend van Lemma 3.4.9 kunnen we dan zonder verlies van algemeenheid onderstellen dat

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ x & y & y \\ x & y & y \end{pmatrix},$$

met $a, x, y > 0$, wat per definitie van K_3 equivalent kan worden uitgedrukt als $axy > 0$.
We kunnen immers Lemma 3.4.9 toepassen op de tweede en derde rij van A, waarvan we weten dat $a_{12} = a_{13} = 0$ en $r_2 = r_3$. Bijgevolg verkrijgen we een nieuwe matrix $A' = (a'_{ij})$ met een identieke tweede en derde rij en ook $a'_{12} = a'_{13} = 0$. De tweede en derde kolom van A' hebben nu ook een identiek nulpatroon en dus kunnen we Lemma 3.4.9 nogmaals gtoepassen, nu op de tweede en derde kolom van A'. Op die manier bekomen we een matrix A'' met bovenstaande gedaante, die we zonder de algemeenheid te schaden mogen vereenzelvigen met A. Lemma 3.4.9 drukt immers uit dat wanneer A'' niet ϕ-maximaal is, ook A niet ϕ-maximaal is. Veronderstel nu dat $x \geq y$. Dan zou

$$A_1 := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ x+y & y & 0 \\ x-y & y & 2y \end{pmatrix}$$

ook een ϕ-maximaliserende matrix in K_3 zijn, aangezien het duidelijk is dat $R_{A_1} = R_A$, $C_{A_1} = C_A$ en $\operatorname{per} A_1 = \operatorname{per} A = 2ay^2$. We vinden echter dat

$$\begin{aligned}\phi_{33}(A_1) - \phi_{22}(A_1) &= r_1r_2 + c_1c_2 - \operatorname{per} A(3|3) - \big(r_1r_3 + c_1c_3 - \operatorname{per} A_1(2|2)\big) \\ &= a(x+2y) + (a+2x)2y - ay - a(x+2y) + (a+2x)2y + 2ay \\ &= ay > 0,\end{aligned}$$

in strijd met Lemma 3.4.5(i). Dus moet $x < y$. Beschouw nu

$$A_2 := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2x & y & y-x \\ 0 & y & y+x \end{pmatrix}.$$

Omdat $R_{A_2} = R_A$, $C_{A_2} = C_A$ en $\operatorname{per} A_2 = \operatorname{per} A = 2ay^2$, is A_2 een ϕ-maximaliserende matrix in K_3. Omdat de tweede en derde kolom van A_2 hetzelfde nulpatroon hebben, zou toepassing van Lemma 3.4.9 opleveren dat ook

$$A_3 := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2x & y-\frac{x}{2} & y-\frac{x}{2} \\ 0 & y+\frac{x}{2} & y+\frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

een ϕ-maximaliserende matrix is in K_3. We zien dat $R_{A_2} = R_{A_3}$, $C_{A_2} = C_{A_3}$ en vinden door ontwikkeling van A_3 naar de eerste rij en de eerste kolom dat

$$\operatorname{per} A_3 = a\left(\left(y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\right) = 2a\left(y^2 - \frac{x^2}{4}\right) < 2ay^2 = \operatorname{per} A_2,$$

waaruit zou volgen dat $\phi(A_3) > \phi(A_2) = \phi(A)$, in tegenspraak met $\phi(A_3) = \phi(A)$. We besluiten dus dat exact een van beide elementen a_{21} of a_{31} gelijk is aan nul.
Stel zonder verlies van algemeenheid $a_{21} < 0$ en $a_{31} = 0$, dus A heeft de volgende gedaante, met $a, b > 0$:

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} a & 0 & 0 \\ \hline b & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right).$$

We beweren nu dat B geen positieve matrix is. Veronderstel uit het ongerijmde dat $B > 0$. Dankzij Lemma 3.4.9 kunnen we stellen dat, met $x, y > 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & x & x \\ 0 & y & y \end{pmatrix}.$$

Omdat $a > 0$ en $b > 0$ halen we uit Lemma 3.4.5 dat

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_{11}(A) - \phi_{21}(A) \\ &= r_2r_3 + c_2c_3 - \operatorname{per} A(1|1) - \big(r_1r_3 - c_2c_3 - \operatorname{per} A(2|1)\big) \\ &= (b+2x)2y + (x+y)^2 - 2xy - 2ay - (x+y)^2 + 0 \\ &= 2y(b + x - a), \end{aligned}$$

dus $a = b + x$, aangezien $y > 0$. Definieer voor een willekeurige voldoende kleine $\epsilon > 0$:

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} a-\epsilon & \epsilon & 0 \\ b+\epsilon & x-\epsilon & x \\ 0 & y & y \end{pmatrix}.$$

Dan volgt dat $R_{A_\epsilon} = R_A$, $C_{A_\epsilon} = C_A$ en

$$\begin{aligned} \operatorname{per} A_\epsilon &= \operatorname{per} A - 2\epsilon xy + \epsilon by - a\epsilon y + 2y\epsilon^2 + O(\epsilon^2) \\ &= \operatorname{per} A + \epsilon y(b - 2x + a) + O(\epsilon^2) \\ &= \operatorname{per} A - 3\epsilon xy + O(\epsilon^2) < \operatorname{per} A. \end{aligned}$$

We bekomen dus dat $\phi(A_\epsilon) > \phi(A)$, een strijdigheid. We besluiten dat B niet positief is.
Uit $a \operatorname{per} B = \operatorname{per} A > 0$ en $a > 0$ halen we dat $\operatorname{per} B > 0$. We kunnen zonder de algemeenheid te schaden aannemen dat

$$B = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}, \qquad \text{met } x, y > 0 \text{ en } uv = 0.$$

We beweren dat $v > 0$. Als $v = 0$, zouden we immers verkrijgen dat voor een willekeurige voldoende kleine $\epsilon > 0$ de matrix

$$A_4 := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b-\epsilon & x & u+\epsilon \\ \epsilon & 0 & y-\epsilon \end{pmatrix}$$

een element is van K_3 en leidt tot $\phi(A_4) > \phi(A)$, een contradictie. Er moet dus gelden dat $u = 0$ en we kunnen de gedaante van A herschrijven, met $a, b, x, y, v > 0$, als

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & x & 0 \\ 0 & v & y \end{pmatrix}.$$

Het is nu duidelijk dat

$$A_5 := \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ v & x & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

ook een ϕ-maximaliserende matrix is in K_3. Merk op dat A en A_5 hetzelfde nulpatroon hebben. Bovendien is $\phi(tA + (1-t)A_5)$ een veelterm in t van graad ten hoogste 3, want

$$\phi(tA + (1-t)A_5) = \phi \begin{pmatrix} y + t(a-y) & 0 & 0 \\ v + t(b-v) & x & 0 \\ 0 & b + t(v-b) & a + t(y-a) \end{pmatrix}.$$

Uit Lemma 3.4.10 volgt dan dat

$$A_6 := \frac{1}{2}(A + A_5) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a+y) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(b+v) & x & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(b+v) & \frac{1}{2}(a+y) \end{pmatrix}$$

ook een ϕ-maximaliserende matrix is in K_3. Door de elementen $\frac{1}{2}(a+y)$ en $\frac{1}{2}(b+v)$ respectievelijk te hernoemen als a en b in de matrix A_6, mogen we aannemen dat

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & x & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Tot slot levert nogmaals de toepassing van Lemma 3.4.5(i) dat

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_{22}(A) - \phi_{21}(A) \\ &= r_1 r_3 + c_1 c_3 - \operatorname{per} A(2|2) - r_1 r_3 - c_2 c_3 + \operatorname{per} A(2|1) \\ &= a(a+b) + a(a+b) - a^2 - a(a+b) - (x+b)a + 0 \\ &= -ax < 0, \end{aligned}$$

opnieuw in strijd met de ϕ-maximaliteit van A. Dit besluit het bewijs. □

Met de volgende stelling bereiken we tot slot het gewenste resultaat.

Stelling 3.4.13. *J_3 is de unieke ϕ-maximaliserende matrix in K_3.*

Bewijs. Zij $A = (a_{ij})$ een ϕ-maximaliserende matrix in K_3. Als we kunnen aantonen dat $A > 0$, volgt dat $A = J_3$ uit Stelling 3.4.11 en zijn we klaar. Veronderstel uit het ongerijmde dat A niet positief is. Uit Lemma 3.4.12 weten we dat A volledig niet-decomposeerbaar is. Er zijn bijgevolg slechts drie mogelijkheden voor het nulpatroon van A, op permutaties van rijen en kolommen na, namelijk: (i) a_{11} is het enige nulelement van A; (ii) a_{11} en a_{22} zijn de enige nulelementen van A; (iii) a_{11}, a_{22} en a_{33} zijn de enige nulelementen van A.

Geval (i). Zonder verlies van algemeenheid mogen we de volgende gedaante voor A aannemen, met willekeurige $x, y > 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & x \\ x & y & y \\ x & y & y \end{pmatrix}.$$

We vertrekken immers van een ϕ-maximaliserende matrix $A = (a_{ij})$ in K_3, met het element op positie a_{11} als enige nulelement. De tweede en derde kolom van A hebben bijgevolg hetzelfde nulpatroon, dus kunnen we daar Lemma 3.4.9 op toepassen om een identieke tweede en derde kolom te verkrijgen. Ook de tweede en derde rij hebben hetzelfde nulpatroon, waardoor we nogmaals Lemma 3.4.9 kunnen gebruiken, nu toegepast op die twee rijen. Zonder de algemeenheid te schaden kunnen we dus al tot deze gedaante voor A komen, met $x, y, z > 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & x \\ z & y & y \\ z & y & y \end{pmatrix}.$$

Aangezien de permanent van een matrix invariant is onder transponeren, volgt per definitie dat $\phi(A) = \phi(A^T)$, dus ook A^T is een ϕ-maximaliserende matrix in K_3. Merk op dat A^T hetzelfde nulpatroon heeft als A. We kunnen dus Lemma 3.4.10 toepassen om te vinden dat $\phi(tA + (1-t)A^T)$ een polynoom is van graad ten hoogste 3 (want A is een vierkante matrix van orde 3) en de matrix $A' := \frac{1}{2}(A + A^T)$ is ook ϕ-maximaliserend in K_3. Door nu de vier identieke elementen $\frac{x+z}{2}$ in A' te hernoemen, kunnen we zonder verlies van algemeenheid de oorspronkelijk beweerde gedaante voor A aannemen.
Vervolgens halen we uit Lemma 3.4.5(i) dat

$$\begin{aligned}
0 &= \phi_{13}(A) - \phi_{23}(A) \\
&= r_2r_3 + c_1c_2 - \operatorname{per} A(1|3) - r_1r_3 - c_1c_2 + \operatorname{per} A(2|3) \\
&= (x+2y)^2 + 2x(x+2y) - 2xy - 2x(x+2y) - 2x(x+2y) + x^2 \\
&= x^2 + 4xy + 4y^2 - 2xy - 2x^2 - 4xy + x^2 \\
&= 4y^2 - 2xy \\
&= 2y(2y - x).
\end{aligned}$$

Nogmaals gebruiken dat $y > 0$ resulteert in $x = 2y$. Samen met het expliciet in rekening brengen dat $A \in K_3$, volgt er:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

We vinden dat $\phi(A) = 1 + 1 - \frac{1}{4} < 1 + 1 - \frac{3!}{3^3} = \phi(J_n)$, strijdig met de aanname dat A een ϕ-maximaliserende matrix is in K_3.

Geval (ii). Beschouw de ϕ-maximaliserende matrix A in K_3 en de matrix A':

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ s & 0 & z \\ v & w & u \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & s & v \\ x & 0 & w \\ y & z & u \end{pmatrix},$$

waarbij $s, v, w, x, y, z > 0$. Het is duidelijk dat $\phi(A) = \phi(A')$, dus ook A' is ϕ-maximaliserend in K_3. Bovendien heeft A' hetzelfde nulpatroon als A. Uit de toepassing van Lemma 3.4.10 op deze matrices met $t = \frac{1}{2}$ mogen we zonder verlies van algemeenheid de volgende gedaante voor A veronderstellen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & u \end{pmatrix}.$$

Beschouw nu de matrix A_1, verkregen door A links en rechts te vermenigvuldigen met de permutatiematrix $P = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$, dus:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ x & 0 & y \\ z & y & u \end{pmatrix}.$$

Het is duidelijk dat $\phi(A) = \phi(A_1)$, dus dit is ook een ϕ-maximaliserende matrix in K_3, met bovendien hetzelfde nulpatroon als A. Beschouw nu de matrices $tA + (1-t)A_1$, voor alle $t \in \mathbb{R}$. Aangezien A en A_1 matrices zijn van orde 3, volgt dat $\phi(tA+(1-t)A_1)$ een veelterm is in t van graad ten hoogste drie. Stel nu $t = \frac{1}{2}$. Uit Lemma 3.4.10 halen we dan dat

$$A_2 := \frac{1}{2}(A + A_1) = \begin{pmatrix} 0 & x & \frac{y+z}{2} \\ x & 0 & \frac{y+z}{2} \\ \frac{y+z}{2} & \frac{y+z}{2} & u \end{pmatrix}$$

ook een ϕ-maximaliserende matrix is in K_3, dus we kunnen in de matrix A zonder de algemeenheid te schaden veronderstellen dat $y = z$. Definieer vervolgens $A_3 := A(J_2 \dot{+} I_1)$, dus

$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & \frac{x}{2} & y \\ \frac{x}{2} & \frac{x}{2} & z \\ \frac{y+z}{2} & \frac{y+z}{2} & u \end{pmatrix}.$$

Omdat de eerste en de tweede kolom van A_3 dezelfde kolomsom hebben, volgt dat ook A_3 een ϕ-maximaliserende matrix is dankzij Lemma 3.4.9. Omdat $A_3 > 0$, moet $A_3 = J_3$ wegens Stelling 3.4.11. Er moet dus gelden dat $x = \frac{2}{3}$ en $y = z = u = \frac{1}{3}$ en we vinden dat

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Hieruit halen we nu dat $\phi(A) = 2 - \frac{8}{27} < 2 - \frac{6}{27} = \phi(J_3)$, strijdig met de ϕ-maximaliteit van A.

Geval (iii). Geheel analoog aan het vorige geval kunnen we opnieuw Lemma 3.4.10 toepassen om aan te nemen dat

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix},$$

met $x, y > 0$. Aangezien de eerste en de derde kolom van A dezelfde kolomsom hebben, kunnen we wegens Lemma 3.4.9 een ϕ-maximaliserende matrix bekomen met precies een nulelement, door het gemiddelde van deze eerste en derde kolom te nemen. Zo zien we dat dit geval zich herleidt tot geval (i), wat een strijdigheid oplevert en het bewijs voltooit. $\square$

3.4.3 Verdere ontwikkelingen

"One hopes to prove that if ϕ is maximal at $A \in K_n$, then $A = J_n$. It seems that one would like to show here that even if $A \neq J_n$, at the very least, A is fully indecomposable. But at the present time I am not able to prove it except for the case $n = 3$. [...]", aldus Hwang in [27].

Hoewel hij er inderdaad enkel in slaagde om Vermoeden 3.4.2 aan te tonen voor $n = 3$, zijn de wiskundigen Gi-Sang Cheon en Ian M. Wanless er vrij recent in geslaagd om het doel van Hwang te bereiken: een bewijs leveren voor het vermoeden van Dittert voor gedeeltelijk decomposeerbare matrices. In [8, Theorem 3.2], gepubliceerd in 2012, bewijzen ze namelijk onder meer de volgende stelling.

Stelling 3.4.14. *Zij $A \in K_n$ gedeeltelijk decomposeerbaar. Dan geldt:* $\phi(A) < \phi(J_n)$.

Verder bewijzen Cheon en Wanless in het artikel [8] nog dat als er een tegenvoorbeeld voor het vermoeden van Dittert zou bestaan, deze matrix − informeel uitgedrukt − heel erg lijkt op J_n, waarmee bedoeld wordt dat de rij- en kolomsommen van deze matrix heel dicht bij 1 liggen en de permanent zeer dicht bij per J_n. Bovendien had Cheon eerder in [9] al een aantal voldoende voorwaarden aangetoond voor de geldigheid van het vermoeden van Dittert voor $n \geq 4$.
Een bewijs van Vermoeden 3.4.2 lijkt dus niet meer zo veraf.

Deel II
Didactische component

1 Context

Het Don Boscocollege te Zwijnaarde is de secundaire school waar ikzelf met veel plezier mijn eerste tot en met zesde middelbaar heb doorgebracht. Het welkom-gevoel en de openheid van DBZ hebben de voorbije jaren niet moeten inboeten aan waarde bij de overdracht van de directeursfakkel en de ongetwijfeld ook andere veranderingen die de school intussen onderging (zoals vernieuwde evaluatiesystemen), integendeel. De aanstekelijke Salesiaanse spirit vormt nog steeds het fundament van dit alles.

Mijn voorstel om in de sterke richtingen wiskunde in de derde graad een eigen lessenreeks uit te werken, werd – geheel in deze lijn – enthousiast onthaald. Mijn oprechte dank gaat hier in het bijzonder uit naar Greet Van Herpe en Yvan De Kerpel. Zij onderrichten namelijk het vak *seminarie wiskunde* in het zesde middelbaar: de optie om binnen het reguliere lessenpakket wekelijks twee uren extra wiskunde te bieden aan de leerlingen die reeds een pool wiskunde volgen in de derde graad. Een publiek dat me uiterst geschikt leek voor het volbrengen van de didactische component die ik zeer graag aan mijn thesis wou toevoegen.

De uitwerking van dit didactisch deel was een unieke en zeer interessante leerschool. Het selecteren van delen van de inhoudelijke component van mijn masterproef die hertaalbaar zijn naar een middelbare schoolniveau, het zelf opstellen van een bijhorende mini-cursus voor zowel leerlingen als leerkracht, het uitzoeken van en experimenteren met geschikte didactische werkvormen, pogingen ondernemen tot differentiatie, het inschatten van het tijdsaspect tijdens de lessen zelf: ik had de lessenreeks helemaal zelf in de hand, van begin tot eind. Zodoende was de beleving en de ervaring nog interessanter dan enkele eerdere stages die ik uitvoerde in het kader van de Specifieke Lerarenopleiding Wiskunde en enkele interimopdrachten die ik intussen ook al heb aangenomen. Bij zo een interimopdracht had ik didactische onderdelen zoals alternatieve werkvormen en differentiatie uiteraard ook zelf in de hand, maar week ik vaak niet (te) veel af van de werkwijze die me opgelegd of aangeraden werd door de leerkracht die ik verving.
Dat ook de voldoening die ik uit deze didactische component putte nog sterker was dan bij een doorsnee stage of interimopdracht, valt onmiddellijk te linken aan de directe respons en feedback die ik van de leerlingen en begeleidende leerkrachten ontving. In mijn ogen hangt de voldoening van een leerkracht onvoorwaardelijk samen met de wijze waarop de leerlingen de lessen ervaren hebben, zowel inhoudelijk als didactisch. Vandaar het belang dat ik hechtte aan de stem van de leerlingen. Een representatieve selectie van hun concrete aanvullingen, suggesties en opmerkingen zijn verderop terug te vinden. Daarnaast vond ik ook de visie van de leerkrachten Greet Van Herpe en Yvan De Kerpel niet onbelangrijk: als ervaringsdeskundigen in het vak was ik ook zeer benieuwd naar hun kritisch doch eerlijk oordeel over zowel de inhoud van mijn lessen als mijn aanpak.
Omdat ik met deze feedback en mijn persoonlijke reflectie maar al te graag rekening hield bij de verwerking in de hernemingen of vervolgdelen van mijn lessen, heb ik er in deze uiteenzetting voor geopteerd om de evaluatie van mijn lessen niet als een aparte paragraaf in te voeren, maar te integreren in het onderdeel dat de uitvoering van mijn lessen beschrijft. Alle bevindingen heb ik per samenhangende blok van twee gegeven lesuren in detail uitgeschreven, geanalyseerd en als basis gebruikt om mijn volgende les te optimaliseren.

2 Inhoud

2.1 Vereiste voorkennis

Er wordt van de leerlingen verwacht dat ze een degelijke basiskennis over determinanten bezitten, alvorens het onderwerp over permanenten wordt aangereikt. De specifieke eindtermen wiskunde voor de derde graad aso omtrent matrices zijn echter zeer beperkt[12] en omtrent determinanten zelfs onbestaande. Alle onderwijsnetten hebben het onderwerp determinanten echter wel in de leerplandoelstellingen opgenomen. We belichten ter illustratie de richtlijnen van de twee grootste onderwijskoepels.
In het gemeenschapsonderwijs behoren determinanten tot de verplicht te onderrichten leerstof voor leerlingen uit de derde graad aso met een pool wiskunde. De volgende leerplandoestellingen uit leerplan 2006/060 van het GO! omtrent determinanten verwoorden de voorkennis die verwacht wordt voor de lessenreeks over permanenten wordt aangevat:

- de leerlingen kennen de definitie van een determinant, de gepaste terminologie en notaties en kunnen deze gebruiken;
- de leerlingen kunnen een determinant berekenen;
- de leerlingen kennen de eigenschappen in verband met determinanten en kunnen deze toepassen bij het berekenen van determinanten.

In het VVKSO behoren determinanten tot de uitbreidingsleerstof en wordt er in verband met eigenschappen van determinanten het volgende vermeld: *Het is duidelijk dat men zich zal beperken tot het ontdekken en formuleren van de eigenschappen van determinanten (met beperking van de graad) die nodig zijn voor de meetkundige toepassingen.*

Omdat determinanten zowel een bijdrage leveren tot het abstracte redeneervermogen van leerlingen (zoals het onderzoeken van eigenschappen, het bewijzen van identiteiten, enz.) alsook gebruikt worden bij toepassingen in de wiskunde (nagaan of een matrix inverteerbaar is, toepassingen in de ruimtemeetkunde, enz.), kiezen veel leerkrachten wiskunde er voor om dit onderdeel te onderrichten in de ruimte die ze hiertoe hebben onder de uitbreidingsleerstof.
Dit is ook het geval in alle richtingen met een pool wiskunde in de derde graad op het Don Boscocollege te Zwijnaarde, meer bepaald in het vijfde jaar. Ik had ervoor kunnen opteren om deze lessenreeks (ook) in de lesssen seminarie wiskunde in het vijfde middelbaar te brengen, maar dat heb ik bewust niet gedaan om bijvoorbeeld te vermijden dat leerlingen eigenschappen van permanenten zouden verwarren met eigenschappen van determinanten uit de reguliere lessen wiskunde. Bovendien is deze lessenreeks vrij theoretisch en eerder abstract van aard en ga ik er van uit dat het abstractieniveau bij zesdejaars (nog) een beetje hoger ligt dan bij vijfdejaars.

2.2 Uitgewerkt lessenpakket

In Appendix C is de opgestelde cursus horende bij het lessenpakket over permanenten terug te vinden voor de leerlingen. Deze cursus bevat enerzijds de bouwstenen om de nodige kennis over permanenten te verschaffen en anderzijds voldoende ruimte om zich deze theorie eigen te

[12] We vinden meer bepaald enkel onder het luik *Algebra* de specifieke eindterm 4: *de leerlingen kunnen met behulp van matrices problemen wiskundig modelleren en oplossen.*

maken, onder meer met behulp van het oplossen van oefeningen en het ontkrachten of bewijzen van vraagjes en vermoedens. Wanneer aan de leerlingen kansen worden geboden om veel zelf aan de slag te gaan (wat ik persoonlijk sterk zou aanraden), zal deze cursus te uitgebreid zijn om te behandelen binnen een tijdsspanne van vier lesuren. Dit biedt echter de mogelijkheid aan de leerkracht om bijvoorbeeld te differentiëren binnen de vele oefeningen of om bepaalde stukken niet in de les te behandelen maar over te laten voor de geïnteresseerde leerlingen als vrijblijvende verdieping voor thuis. Een uitgebreide versie van de cursus voor de leerkracht, die voorzien is van inhoudelijke en didactische aanvullingen alsook de oplossingen van alle oefeningen en de uitgewerkte bewijzen bevat, is bijgevoegd in Appendix D.
De inhoud van elke sectie in deze cursus staat hieronder beknopt samengevat.

1 Definitie: opbouw

Omdat de leerlingen nog niet vertrouwd zijn met de algemene definitie van de determinant van een $n \times n$-matrix, start de cursus met de interessante opbouw van onontbeerlijke bouwstenen (permutatie, teken van een permutatie, symmetrische groep) die de leerlingen nodig hebben om tot deze definitie te komen. Gewenning en verwondering staan hierbij centraal. Vervolgens kan de overgang gemaakt worden naar permanenten. De leerlingen sluiten de paragraaf af met enkele concrete berekeningen en oefeningen hierop.

2 Eigenschappen

In de tweede paragraaf staat de ontdekking van enkele eigenschappen van permanenten en in het bijzonder de opsporing van gelijkenissen en verschillen met eigenschappen van determinanten centraal. Leerrijke denkpistes dienen door de leerlingen te worden bereden door de opgegeven vragen ofwel te bekrachtigen met een bewijs ofwel tegen te spreken met een concreet tegenvoorbeeld, zoals dat van wiskundige vermoedens vereist wordt.

3 Berekening van permanenten

Vervolgens wordt opgestoken kennis uit de eerste twee paragrafen gecombineerd om tot enkele alternatieve manieren te komen voor de berekening van permanenten. Deze paragraaf is in eerste instantie theoretisch van aard en omwille van de vele nieuwe notaties van een waarschijnlijk (zeer) moeilijk niveau voor de leerlingen. Desalniettemin is het vermeldenswaardig dat een analogon van het ontwikkelen van een vierkante matrix naar een bepaalde rij of kolom (de regel van Laplace) kan worden gebruikt om permanenten te berekenen van matrices van hogere orde.

4 Afschattingen

In welke context er interesse is ontstaan in ongelijkheden met betrekking tot permanenten, wordt ten slotte toegepast in de vierde en laatste paragraaf. Door het bewijzen van enkele (basis)afschattingen komen de leerlingen tot basistechnieken en inzichten die bij dergelijke ongelijkheden herhaaldelijk kunnen worden ingezet (zoals de driehoeksongelijkheid). Bovendien verdiepen de leerlingen zich in twee types bijzondere matrices (binaire matrices en dubbelstochastische matrices), waarbij ze alle opgebouwde kennis uit voorgaande paragrafen kunnen toepassen om zeer interessante besluiten en vermoedens te formuleren over maximaal en minimaal te bereiken waarden van permanenten van deze matrices. Het vermoeden van Van der Waerden vormt enerzijds het sluitstuk van deze cursus, anderzijds het begin van de verdieping die ik uitvoerde in het inhoudelijke luik van deze masterproef.

2.3 Eindtermen en lesdoelstellingen

Hieronder staan enkele algemene vakgebonden eindtermen (ET) geselecteerd uit de derde graad wiskunde aso[13], die − zelfs nog niet gekaderd in de specifieke invulling die de verschillende onderwijsnetten er aan geven − toepasbaar zijn op de uitgewerkte lessenreeks over permanenten. Ik licht ook kort toe waarom juist deze eindtermen mij toepasselijk lijken en link deze eindtermen nadien aan mijn concrete lesdoelstellingen bij de verschillende paragrafen van de mini-cursus.

ET1 − *De leerlingen kunnen wiskundetaal begrijpen en gebruiken.*
Bij de invoering van het nieuw wiskundig concept hoort logischerwijs de invoering van bijhorende nieuwe symbolen en notaties. De leerlingen moeten deze begrijpen om ze te kunnen toepassen, bijvoorbeeld bij hetberekenen van de determinant of permanent van een matrix met behulp van de (abstracte) definitie.

ET4 − *De leerlingen pakken wiskundige problemen planmatig aan (door eventueel hiërarchisch op te splitsen in deelproblemen).*
Het expliciet hanteren van een planmatige aanpak wordt mooi geïllustreerd door de leerlingen te laten nagaan welke eigenschappen de permanentfunctie bezit, vertrekkend van en vergelijkend met gekende analoge eigenschappen die geldig zijn voor determinanten van vierkante matrices. Ook de leerlingen eerst de structuur van een bewijs mee te geven en pas dan stapsgewijs het bewijs effectief te gaan opstellen, getuigt van een planmatige aanpak.

ET10 − *De leerlingen winnen informatie in over het aandeel van wiskunde in een vervolgopleiding van hun voorkeur en in hun voorbereiding erop.*
Leerlingen op het einde van de derde graad secundair onderwijs hebben het eindpunt van hun middelbare schoolloopbaan in zicht. Met het onderwerp dat hier wordt aangereikt, komen de leerlingen al eens in aanraking met een abstractere vorm van wiskunde. Daar de leerlingen voor wie deze lessenreeks bedoeld is bewust voor de pool wiskunde in het secundair onderwijs gekozen hebben, is het niet onlogisch dat ze in hun verdere studieloopbaan nog met (abstracte) wiskunde in aanraking zullen komen. Deze eindterm is als rode draad van toepassing doorheen de hele lessenreeks over permanenten.

ET12 − *De leerlingen ontwikkelen zelfregulatie met betrekking tot het verwerven en verwerken van wiskundige informatie en het oplossen van problemen.*
Omdat de behandeling van permanenten sterke overeenkomsten vertoont met determinanten (waar de leerlingen reeds goed vertrouwd mee verondersteld worden te zijn), vormt dit bij uitstek een onderwerp waarmee de leerlingen in een zekere mate van zelfstandigheid aan de slag kunnen om opgaven te bestuderen en problemen op te lossen. De bijsturing van het leerproces door de leerkracht wordt hierbij idealiter geminimaliseerd en de zelfregulatie van de leerlingen wordt opgekrikt.

ET13 − *De leerlingen zijn gericht op samenwerking om de eigen mogelijkheden te vergroten.*

[13] bron: site van de Vlaamse Overheid > Onderwijs en Vorming > Curriculum > Wiskunde - aso - Derde graad - Secundair onderwijs; url: `http://eindtermen.vlaanderen.be/secundair-onderwijs/derde-graad/aso/vakgebonden/wiskunde/eindtermen.htm`

Vertrekkende van dezelfde voorkennis kan het zeer interessant zijn om bij nieuw aangereikte leerstof de leerlingen elkaars (vaak verschillende) invalshoeken onder woorden te laten brengen en hierover met medeleerlingen te reflecteren, bijvoorbeeld bij de aanpak van het bewijs van een stelling. Bovendien moedigen dergelijke samenwerkingsprocessen ook de vakoverschrijdende eindtermen met betrekking op sociale vaardigheden aan.

In mijn inhoudelijke lesdoelstellingen leg ik de nadruk bewust op het begrijpen en kunnen toepassen van de nieuw aangereikte leerstof. Het verband met bovenstaande algemene eindtermen wordt hierbij concreter gemaakt per paragraaf uit de opgestelde cursus.

1 Definitie: opbouw

- LD1 – De leerlingen kunnen de abstracte definitie van de determinant en de permanent van een matrix verklaren. (∼ ET1)
- LD2 – De leerlingen kunnen de permanent van een matrix berekenen. (∼ ET1)
- LD3 – De leerlingen kennen en herkennen enkele bijzondere matrices. (∼ ET1)

2 Eigenschappen

- LD4 – De leerlingen kunnen de correctheid van een wiskundige bewering nagaan door het construeren van een tegenvoorbeeld of het opstellen van een bewijs. (∼ ET4, ET12, ET13)
- LD5 – De leerlingen kunnen met behulp van hun voorkennis over determinanten eigenschappen van permanenten onderzoeken. (∼ ET4, ET12, ET13)
- LD6 – De leerlingen kunnen rekenregels voor de berekening van permanenten toepassen. (∼ ET1)

3 Berekening van permanenten

- LD2 – De leerlingen kunnen de permanent van een matrix berekenen. (∼ ET1)

4 Afschattingen

- LD7 – De leerlingen kunnen opeenvolgende stappen in de redenering van een bewijs aangeven en verklaren. (∼ ET4)
- LD3 – De leerlingen kennen en herkennen enkele bijzondere matrices. (∼ ET1)
- LD8 – De leerlingen kunnen inzicht verwerven in een nieuwe definitie door vragen daaromtrent te onderzoeken. (∼ ET4, ET12)

Daarnaast spreekt het voor zich dat deze lessenreeks ook bijdraagt tot tal van vaardigheden en attitudes, waarbij de grens met de inhoudelijke doelstellingen vaak dun is. We sommen de voornaamste vaardigheden en attitudes van toepassing op de lessenreeks over permanenten op:

- denk- en redeneervaardigheden, onder meer:
  - het begrijpen van een redenering of argumentering bij een eigenschap;
  - het opbouwen van een redenering ter verklaring van een eigenschap of de oplossing van een probleem; dit houdt onder meer in: een hypothese (vermoeden) formuleren en argumenteren;
  - een gegeven redenering op haar geldigheid onderzoeken;
- wiskundige taalvaardigheid, onder meer:
  - het begrijpen van wiskundige uitdrukkingen (zowel mondeling als schriftelijk);
- zin voor samenwerking en overleg, onder meer:
  - de ervaring dat ze hun mogelijkheden kunnen vergroten door samenwerking met anderen;
  - appreciatie voor een andere oplossing of aanpak;
- leervaardigheden en reflectievaardigheden;
- probleemoplossende vaardigheden;
- waardering voor wiskunde door inzicht in de bijdrage ervan in de culturele, historische en wetenschappelijke ontwikkeling, onder meer:
  - zin voor verwondering en bewondering voor de elegantie van een redenering of een oplossing.

De concrete invulling van deze vaardigheden en attitudes komen duidelijk tot uiting in de beschrijving van de uitgevoerde lessen in de volgende paragraaf.

3 Uitvoering, evaluatie, reflectie

3.1 Lessen 1 en 2 - groep A

Op vrijdag 24 maart 2018 bracht ik het eerste deel van mijn lessenreeks voor de eerste groep seminaristen, die dag (rekening houdende met een afwezige leerling) bestaande uit 13 leerlingen.

Deze eerste uitvoering – ik steek het niet onder stoelen of banken – gaf me zeer veel voldoening. Het voelde aan als het begin van een tour waarmee ik mijn verdieping in dit thesisonderwerp zou afsluiten. Ik heb er sterk van genoten om deze oprecht geïnteresseerde leerlingen iets nieuws bij te brengen en die passie heb ik duidelijk op hen kunnen overdragen. Ik bemerkte bijvoorbeeld momenten van verwondering bij de leerlingen wanneer de formele definitie van de determinant bleek overeen te komen met de intuïtieve uitwerking van de determinant van een vierkante matrix van orde 2 of 3. Ook een zekere gedrevenheid bij het zoeken naar een tegenvoorbeeld om te ontkrachten van de uitspraak dat de permanent van het product van matrices gelijk is aan het product van de afzonderlijke permanenten, nam ik bij de (meeste) leerlingen waar.

Didactisch was ik zeer tevreden met de uitvoering van deze lessenreeks. Het klassenmanagement vereiste omwille van de interesse van de leerlingen niet veel moeite. Mede door de afwisseling in werkvormen – stukje doceren bij de invoering van nieuwe begrippen, onderwijsleergesprek bij het toepassen van die nieuwe begrippen, zelfstandig aan de slag met sommige oefeningen, placematsysteem bij het onderzoeken van de eigenschappen van permanenten – wist ik de aandacht van de leerlingen moeiteloos bij het onderwerp te houden. Ook mijn tijdsinschatting zat goed: op de laatste oefeningen van de tweede paragraaf na heb ik volledig de mooi samenhangende eerste en tweede paragraaf kunnen behandelen, volledig in de lijn met wat ik vooraf hoopte te bereiken. De begeleidende leerkracht, Yvan De Kerpel, had op didactisch vlak ook geen enkele opmerking. Hij vond zowel mijn aanbreng van dit onderwerp als de bijhorende cursus zeer overzichtelijk.

Ook op inhoudelijk vlak verliep het meeste zeer vlot. Het inschatten van de voorkennis bleek niet altijd even makkelijk (een aanzienlijk deel van de leerlingen wist bijvoorbeeld niet meer hoe matrixvermenigvuldiging in zijn werk ging), maar dat vereist volgens mij vooral ervaring. Leerkracht Yvan De Kerpel was alleszins zeer geboeid door de inhoud: de oplossingencursus liet hij gedurende geruime tijd dicht, om eerst, tegelijkertijd met zijn leerlingen, zelf de oefeningen en vraagjes te beantwoorden. Naar het einde van de les toe zette ik de ontdekking van het niet toepasbaar zijn van elementaire rij-operaties voor de berekening van permanenten verbaal (stemverheffing, spelen met intonatie) en visueel (in kleurkrijt aan bord zetten) kracht bij. Hiermee had ik tot slot mooi de link gelegd naar de inhoud van de derde paragraaf die in de vervolgles aan bod zou komen.

Op basis van mijn eigen lesgeven (keuze voor bepaalde werkvormen, onderdelen die moeizamer of juist vlotter verliepen dan vooraf verwacht, enz.) en extra mondelinge toelichtingen (interpretatie achter de definitie, voorkennis die de leerlingen al dan niet bezitten, enz.) die ik de leerlingen tijdens deze twee lessen had aangereikt, dacht ik vlak na deze uitvoering dat het een meerwaarde kon betekenen om deze toelichtingen ook op papier te zetten in de oplossingenbundel voor de begeleidende leerkracht. Mijn eerste versie van deze cursus werd bijgevolg verrijkt met enkele alinea's onder de noemer *Aanvulling voor de leerkracht*, om de leerkracht die deze lessenreeks uitvoert van bijkomende ondersteuning en suggesties te voorzien, zowel inhoudelijk als didactisch (zie Appendix C).

3.2 Lessen 1 en 2 - groep B

Een week later, de laatste vrijdag voor de paasvakantie, bracht ik dezelfde lessenreeks voor de tweede groep leerlingen (aantal: 16) die in het zesde middelbaar seminarie wiskunde volgen.

De leergierigheid en gedrevenheid van deze leerlingen was minstens zo groot als bij de eerste groep, wat maakt dat je daar als leerkracht heel handig op kan inspelen. Bovendien was ik ook aangenaam verrast door het enthousiasme van de begeleidende leerkracht Greet Van Herpe: wanneer de leerlingen in groepjes aan de slag gingen bij de tweede sectie, stapte zij – net zoals ik – rond om de verschillende groepjes positief te bekrachtigen of verder op weg te helpen.
Voornamelijk omwille van de inzet van deze groep werd er een kleine tijdsachterstand ten opzichte van de vorige groep gecreëerd (de eigenschap omtrent de permanent van het product van matrices werd door de meeste groepjes hier nog niet bereikt, terwijl in groep A alle eigenschappen binnen het tweede lesuur overlopen waren). Veel leerlingen namen immers ruim de tijd

om de verschillende gevonden (tegen)voorbeelden van elkaar in detail te bestuderen en sommigen poogden algemene bewijzen te leveren voor vierkante matrices van orde n in plaats van zich te beperken tot matrices van orde 2 of 3. Ik juichte dit uiteraard toe, maar probeerde er tegelijkertijd voor te zorgen dat de verschillen in tempi tussen de groepjes binnen de perken bleef.

Op inhoudelijk vlak vermeld ik graag dat de stukken *Aanvulling voor de leerkracht* die ik na de vorige lessen in de eerste twee paragrafen had toegevoegd, zelfs al in deze parallelles voor mij een mooie houvast bleken te bieden. Zo kon ik bijvoorbeeld vermoeden op welke plaatsen ik de leerlingen een extra woordje uitleg zou moeten aanreiken (zoals bij de invoering van de product-notatie).

Omdat ik directe feedback zeer belangrijk vind, had ik na deze twee aansluitende lessen een gemoedelijk gesprek met de begeleidende leerkracht. Mijn drie sterkste punten, aldus lerares Greet Van Herpe, luidden:

- prima omgang met de leerlingen: betrokken, aanmoedigend;
- zeer heldere uitleg van de nieuwe concepten;
- oog voor structuur, zowel in de cursus als aan bord.

Verbeterpunten had ze niet voor mij, noch inhoudelijk, noch didactisch. Minstens zo belangrijk vond ik dat uit een korte informele rondvraag aan de leerlingen op het einde van de les bleek dat ook zij niet met inhoudelijk onbeantwoorde vragen of met tegenstrijdige indrukken in vergelijking met mijn persoonlijke ervaring van deze les bleven zitten.
Toch weet ik dat een blijvend werkpuntje voor mezelf het (te) hoge spreektempo is dat ik soms hanteer als ik voor de klas sta. In mijn enthousiasme gebeurt het namelijk wel eens dat ik te vlug praat, waardoor belangrijke informatie die ik aan de leerlingen probeer mee te geven, helaas verloren kan gaan.

3.3 Lessen 3 en 4 - groep A

Het was intussen bijna een maand geleden dat ik mijn eerste uitvoering voor deze klasgroep bracht, dus ik was erg benieuwd naar wat er nog bij de leerlingen was blijven hangen bij de herneming van de lessenreeks over permanenten op vrijdag 20 april 2018.

De les starten door de definitie van de permanent van een vierkante matrix aan bord te zetten en met behulp van een onderwijsleergesprek elk aspect en de betekenis van die definitie in herinnering te brengen bleek een zinvolle zet. Ik was me er goed van bewust dat het bij sommige leerlingen even tijd en inoefening zou vragen om opnieuw aan de notaties en definities te wennen, maar was erg opgelucht dat de geziene leerstof gaandeweg effectief terug geactiveerd werd. Dit was bijvoorbeeld merkbaar door *ah, juist!*-reacties van enkele leerlingen tijdens het oplossen van de oefeningen op eigenschappen van permanenten, volgend op de herhaling als inleiding. Ook de volgende opmerking, die een leerling noteerde in de open ruimte over de inhoud van de lessen op het evaluatieformulier (zie Appendix E) dat ik op het einde van de vierde les uitdeelde, getuigde hier van:

In het begin [had ik moeite om te volgen met de nieuwe (abstracte) definities en notaties], daarna niet meer.

Een andere leerling onderlijnde dat vooral de notaties ervoor zorgden dat mijn uiteenzetting toch vaak moeilijk te volgen was. Met een gemiddelde score van 2.6 op deze vraag over de inhoud en geen enkele leerling die aangaf dat hij/zij helemaal geen of juist veel moeite had om te volgen met de nieuwe (abstracte) concepten en notaties, was ik echter tevreden. Het was bij deze lessen over permanenten namelijk onvermijdelijk om een aantal nieuwe concepten en bijhorende notaties in te voeren en blijkbaar ben ik er vrij goed in geslaagd een middenweg te vinden tussen de minimaal nodige bouwstenen meegeven en de leerlingen overladen met definities en symbolen. Het nog minder diepgaand behandelen van de paragraaf over berekeningsmethoden voor de evaluatie van permanenten, met name de oefening op de formule van Glynn, kan bij de herneming van de les voor groep B de score op deze vraag hopelijk nog scherper stellen.

Het vervolg verliep zeer vlot, met een aangename medewerking van de leerlingen, een goede inschatting van hun niveau en een mooie afwisseling in didactische werkvormen, waar ik voor de details naar de *Aanvullingen voor de leerkracht* verwijs die terug te vinden zijn in de cursus voor de leerkracht (Appendix D). Aangezien ik goed op tijdsschema zat om alle voorziene leerstof te kunnen behandelen, kon ik af en toe een beetje uitwijden, zoals de vermelding van een voorbeeld waarbij permanenten in kansberekening te pas kunnen komen. Een leerling schreef hieromtrent in de evaluatie over mijn lessen op het einde nog neer:

Soms een kleine opmerking gegeven dat de leerstof juist moeilijker maakte.

Het is inderdaad zo dat ik af en toe extra toelichting gaf over een (niet expliciet behandelde) oefening of een stukje theorie, eerder bedoeld voor de leerlingen die geïnteresseerd zouden zijn in zo'n (uitbreidend) uitdagend stukje. Een mooi voorbeeld hiervan is het deel over de expansiestelling van Laplace. Bijgevolg kan ik me dan ook volledig vinden in het feit dat dit voor sommige leerlingen als een (nog) moeilijk(er) stukje uitleg overkwam. Toch ben ik niet van plan dergelijke extraatjes in het vervolg uit de weg te gaan of over te slaan zonder er ook maar iets over te vertellen, want dit vormt voor een aantal leerlingen volgens mij juist de basis van prikkels om een verdere interesse op te bouwen. Wel kan ik duidelijk(er) benadrukken wanneer het om uitbreiding gaat en het dus niet erg is als een leerling niet volledig zou mee zijn met een kleine bijkomende toelichting.

Op didactisch vlak scoorden de eerste vier vragen uit de evaluatie respectievelijk gemiddeld 3.8, 3.9, 3.9 en 3.8, waarbij door niemand een score 1 of 2 werd toegekend. Ik vond dit zeer erkentelijk; het gaf me enorm veel voeldoening dit te lezen. Bij een gemiddelde score van 2.2 werd mijn lestempo door de leerlingen doorgaans eerder niet als te hoog ervaren. Met meer bepaald slechts twee leerlingen die dit echt niet het geval vonden en amper drie leerlingen die vonden dat de les doorgaans toch eerder te snel werd onderricht, kan ik besluiten dat een tijdsbesteding van vier lestijden aan deze cursus over permanenten een mooie inschatting was.

Daarnaast was de beoordeling die ik kreeg van de begeleidende leerkracht Yvan De Kerpel uiterst lovend. Hij uitte zich op inhoudelijk vlak helemaal akkoord met het intellectueel uitdagend zijn van de leerstof en de perfecte aanpassing aan het niveau van de leerlingen, zonder het voor hen te moeilijk te maken. Zijn verklaring hiervoor luidde: [...] *omdat het héél wat raakvlakken had met de theorie die ze al gezien hadden van determinanten.*

Qua didactiek lag deze lessenreeks op hetzelfde hoge niveau, aldus Yvan De Kerpel. Dat resulteerde in de toekenning van een maximale waarde op elk te beoordelen didactisch aspect (zie Appendix F) en het volgens hem hanteren van een perfect lestempo. Dat laatste item vond ik zelf een van de moeilijkste om in te schatten, dus ik was enigszins opgelucht dat iemand die al zo lang ervaring heeft in het vak, daar niets op aan te merken had. Met onderstaande commentaar van Yvan De Kerpel op didactisch vlak sluit ik met een heel voldaan gevoel af.

Kwinten heeft dit fantastisch gedaan. Ik heb al zoveel beginnende leerkrachten de voorbije tientallen jaren zien lesgeven en bijgevolg kost het mij geen tijd om iemand te doorgronden.
Hier is mijn eindconclusie: Kwinten heeft het in zijn bloed zitten om leerkracht te zijn!

3.4 Lessen 3 en 4 - groep B

Mijn laatste lessen over permanenten, bijgewoond door leerkracht Greet Van Herpe en professor en didacticus Hendrik Van Maldeghem, vonden plaats voor de veertien leerlingen van de tweede groep seminaristen (er waren namelijk twee afwezigen) op vrijdag 4 mei 2018.

Op enkele aanpassingen na die ik uitvoerde op basis van mijn voorgaande bevidingen, verliep de les grotendeels parallel met de vorige groep. Aangezien deze leerlingen qua niveau zeer gelijk(w)aardig zijn, is dit uiteraard niet onlogisch. Als enig benoemenswaardig verschil viel het me op dat de meeste leerlingen in vergelijking met de andere groep regelmatig nog meer motivatie vertoonden om tot het correct beantwoorden van de vragen in de cursus te komen, waar ik hen dan ook − zeker met het oog op mijn eerder geformuleerde lesdoelstellingen − graag de tijd voor gaf. Ik voorzag hierbij de nodige uitdagingsoefeningen voor zij die een stuk sneller klaar zouden zijn dan medeleerlingen, zonder mijn tijdsverdeling intussen uit het oog te verliezen. Waar ik in de vorige groep het voor mezelf nog moeilijk vond om in te schatten hoe lang de bewijzen van de ongelijkheden in het begin van de vierde paragraaf in beslag zouden nemen, kon ik dat nu reeds beter inschatten. Uit de evaluatie op het einde van de les bleek dat de leerlingen het lestempo doorgaans zeker niet te hoog vonden (gemiddelde score van 1.4 op de laatste te beoordelen didactische bewering) en dat stemde ook overeen met mijn eigen ervaring en hoe ik het had gewenst, meer nog dan bij groep A.

Ik vond het heel aangenaam om uit de evaluatieformulieren te ontdekken dat het didactische aspect van mijn lessen volledig in dezelfde lijn lag als de ervaringen bij de andere groep leerlingen. Met drie keer een score van 3.9 waren de leerlingen het unaniem eens dat de lessen op een gepassioneerde/enthousiaste manier gegeven werden, dat de nieuwe wiskundige concepten duidelijk werden uitgelegd en dat ik aandacht had voor hun vragen en opmerkingen. Ook de structuur van de lessen en de bijhorende cursus werden met een gemiddelde score van 3.6 erg geapprecieerd. Een leerling ging hier echter eerder niet akkoord mee: hij/zij verklaarde deze toekenning als volgt:

Veel ingewikkeld geformuleerde zinnen of ingewikkelde definities die irrelevant waren.

Met het eerste deel van deze uitspraak doelt de leerling waarschijnlijk op het feit dat ik bij het onderwijsleergesprek om enkele basisafschattingen met betrekking tot permanenten te bewijzen de focus legde op het onder woorden brengen van de bevindingen. Het inzicht verwerven in een bewijs is vanzelfsprekend een belangrijke eerste stap, maar ik merkte – zoals verwacht – dat het voor een aanzienlijk deel van de leerlingen vaak niet evident was om dat vervolgens duidelijk en volledig in een volzin te vatten.
In verband met de ingewikkelde definities bevatte de cursus inderdaad heel wat nieuwe notaties en concepten. Ik heb echter getracht om juist de meest relevante definities aan te brengen en dus bewust bijvoorbeeld de derde paragraaf heel selectief te behandelen, gebaseerd op mijn bevindingen in de parallelgroep en zoals ik aangeef in de *Aanvulling voor de leerkracht* in de uitgewerkte cursus voor de begeleidende leerkracht en geïnteresseerde lezer.
Enkele andere leerlingen noteerden op didactisch vlak dan weer het volgende:

Heel aangenaam en makkelijk om te luisteren en te volgen. Gestructureerder dan de meeste leerkrachten die we de afgelopen jaren al gehad hebben.

Het was goed uitgelegd.

Goed lesgegeven.

Wat me bij de laatste twee commentaren verraste, is dat deze leerlingen op inhoudelijk vlak aangaven dat ze de ingevoerde definities en notaties abstract vonden en het onderwerp hen eigenlijk niet lag. Ik vind het sterk en enigszins matuur dat deze leerlingen een duidelijk onderscheid kunnen maken tussen het inhoudelijke aspect van de les – en er eerlijk in zijn dat het hen niet kon interesseren – en de manier waarop deze leerstof werd overgebracht.

Aanbeland bij het inhoudelijke aspect, bleek het een goede keuze om rekening te houden met mijn persoonlijke reflectie over de parallelles, in de hoop de moeilijkheidsgraad op vlak van nieuwe (abstracte) concepten en notaties naar een aangenaam doch niet ondermaats niveau te brengen. Ik was dan ook erg blij met het mooi gecentraliseerd antwoord van 'eerder niet akkoord' op de vraag of de leerlingen hier moeite mee hadden (gemiddelde quotatie van 2.0). Ook de beoordeling van de vraag of de leerstof te moeilijk bevonden werd, was iets scherper dan bij groep A: het gemiddelde bedroeg 1.5 en geen enkele leerling verklaarde zich in een bepaalde mate akkoord met deze uitspraak. Desalniettemin waren alle leerlingen het er bij een gemiddelde score van 3.6 over eens dat de leerstof over permanenten hen op intellectueel vlak sterk heeft uitgedaagd. Dat is ook mijn hoofdbedoeling geweest van het onderrichten van deze lessen over permanenten: de leerlingen kennis laten maken met een nog ongeziene tak van de wiskunde waarbij inzicht ontwikkelen en verbanden leggen primeren, aangereikt op een gepast niveau. Het beoogde doel is dus ongetwijfeld bereikt.

Tot slot vond ik het niet onbelangrijk om ook de beoordelingen op de evaluatie ingevuld door de begeleidende leerkracht ter harte te nemen. Zij zijn immers de spilfiguren in de beslissing of er ook de volgende jaren met dit lessenpakket aan de slag zal worden gegaan. Het was daarom een heel fijne constatatie dat haar bevindingen in eenzelfde zeer positieve lijn lagen als de ervaringen van de leerlingen en van mezelf. Dat het onderwerp ‘permanenten’ ook bij haar aansloeg, kon ik doorheen de lessen reeds vermoeden uit haar gedrevenheid om zelf en/of samen met de leerlingen oprecht geïnteresseerd mee te zoeken naar de correcte antwoorden op de vele vragen in de mini-cursus. De afwisseling in verschillende werkvormen die ik bij mijn uiteenzetting hanteerde, vond ze zeer geschikt. Vooral de opportuniteit die aan de leerlingen werd geboden om in groepjes ontdekkingsgericht een leerproces op te bouwen, kon Greet Van Herpe erg smaken. Het paste volgens haar heel mooi binnen de opzet die een vak als *seminarie wiskunde* nastreeft: even afstappen van het reguliere curriculum, om nieuwe onderwerpen te kunnen aansnijden en de leerlingen vooral inzicht te laten verschaffen, hen eens vanuit een andere invalshoek aan wiskunde te laten doen.

3.5 Test - groep A

De opzet om de lessenreeks over permanenten te besluiten met een toets voor de leerlingen was verrijkend voor mezelf in twee opzichten: enerzijds was er het proces van bedenken en opstellen van geschikte vragen, aansluitend bij de doelstellingen van mijn lessen; anderzijds kon ik met deze test nagaan in welke mate de leerlingen de aangereikte leerstof over permanenten onder de knie gekregen hadden.
Ook de keuze om de leerlingen hun mini-cursus over permanenten te laten gebruiken bij het maken van de toets lag in mijn ogen voor de hand: het is een manier van evalueren die in het hoger onderwijs af en toe voorkomt, maar waar leerlingen uit het secundair onderwijs nog amper mee in aanraking gekomen zijn. Bovendien trachtte ik met mijn lessenreeks over permanenten de leerlingen vooral op inzichtelijk vlak iets bij te brengen en sluit deze manier van ondervragen daar volgens mij het beste bij aan.

Terwijl ik op vrijdag 4 mei 2018 mijn laatste lessen uitvoerde voor groep B, legden 13 leerlingen van groep A onder begeleiding van Yvan De Kerpel, hun leerkracht voor seminarie wiskunde, de toets af. De opgaven zijn bijgevoegd in Appendix G, alsook de oplossingen, die voorzien zijn van een gedetailleerde puntenverdeling en de vermelding welke van de bereikte lesdoelstellingen met elke vraag getest worden.

De maximum te behalen score was 10 punten. Slechts een leerlinge slaagde erin dit perfecte resultaat te bekomen. De laagst behaalde score was 4/10, tevens het enige tekort. Het gemiddelde bedroeg 7.6/10 en de mediaan 8/10. Hieronder volgt een beknopte bespreking van mijn bevindingen van de antwoorden van de leerlingen per vraag.

Vraag 1
De eerste vraag werd door de meesten − volledig volgens mijn verwachtingen − correct beantwoord. Wanneer het maximum van de punten hier niet behaald werd, was dat te wijten aan een reken- of tekenfout, op een leerling na. Hij trachtte namelijk de permanent te berekenen m.b.v. de definitie, maar vergat in zijn uitwerking 18 van de 24 termen met diagonaalproducten. Dit was dan ook niet de aangeraden werkwijze, waar ik in de les nadruk op had gelegd.

Vraag 2
Een viertal leerlingen besteedden bij vraag 2 onnodig veel tijd aan het uitwerken van enkele tot talloze voorbeelden die het antwoord bevestigden dat de permanent van een (permutatie)matrix slechts gelijk is aan de permanent van zijn tegengestelde matrix als de orde van de matrix even is. In de quotatie ben ik streng maar rechtvaardig geweest; een specifiek voorbeeld geldt immers niet als een algemene verklaring, die hier eenvoudigweg met behulp van de geziene eigenschap in verband met vermenigvuldiging met een reëel getal kon worden gegeven.

Vraag 3a
Het bewijs van de bewering dat de enige dubbelstochastische bovendriehoeksmatrix van orde 2 de eenheidsmatrix is, is erg straightforward. De moeilijkheid voor leerlingen zat hier echter in het duidelijk en gestructureerd onder woorden/symbolen brengen van het inzicht. Sommigen slaagden hier opmerkelijk beter in dan anderen; het is een vaardigheid die iedereen op een ander niveau beheerst en waar in (de doorsnee wiskundelessen in) het secundair onderwijs niet sterk op wordt ingezet. Echte fouten die hier gemaakt werden, zijn te verklaren door antwoorden naast de kwestie (zoals: elke eenheidsmatrix is een bovendriehoeksmatrix) of door het niet grondig genoeg beheersen van de definities/gedaantes van enkele bijzondere matrices, waar in mijn lessen de nodige aandacht aan werd besteed (conform de onderzoekscomponent van mijn thesis). Onder meer met het oog op het vermijden van dergelijke onwetendheden opteerde ik er juist bewust voor om de leerlingen hun cursus over permanenten te laten gebruiken bij het afleggen van de test. Ik vond dit dan ook een verrassende constatatie, die waarschijnlijk te wijten was aan verstrooidheid.

Vraag 3b
Bij de uitspraak dat voor elke binaire matrix van orde 3 de permanent samenvalt met de determinant, vond elke leerling een tegenvoorbeeld. Om een beetje tegemoet te komen aan de mogelijk grote verschillen in de tijdsbesteding van de constructie van een tegenvoorbeeld (wat me reeds duidelijk werd wanneer de leerlingen zelfstandig of in groepjes aan de slag gingen in mijn lessen over permanenten), bleek het een goede zet om de uitspraak specifiek te beperken tot 3×3-matrices, terwijl ze uiteraard voor elke vierkant matrix foutief is.

Vraag 4
Slechts een leerling wist de volle twee punten te scoren op de laatste vraag. Zij vermeldde namelijk als enige in de verklaring van de minimale waarde van de permanent van een rijstochastische matrix expliciet waarom een kleinere waarde dan nul onmogelijk is. Het ontbreken van dit argument resulteerde voor heel wat leerlingen in een score van 1.5/2 op deze vraag. Enkele leerlingen scoorden op deze vraag helemaal geen punten door op een helemaal verkeerd spoor te zitten, voornamelijk omwille van het (opnieuw) niet beheersen van de definitie van een rijstochastische matrix. Deze laatste vraag had ik vooraf als moeilijkste (lees: meeste uitdagende) ingeschat en bleek deze reputatie te hebben waargemaakt.

Mijn conclusie luidt dat deze toets mooi aansloot bij de bereikte doelstellingen, bij het niveau van het lessenpakket en bij de in de lessen gelegde accenten. Ook de begeleidende leerkracht beaamde dit.

3.6 Test - groep B

Het testen van dezelfde doelstellingen werd uiteraard ook in de tweede groep beoogd. De vraagstelling lag helemaal in dezelfde lijn, omdat zowel uit mijn eigen reflectie als uit de feedback van de begeleidende leerkracht bleek dat geen noodzakelijke veranderingen vereist waren.
De opgaven en oplossingen, inclusief puntenverdeling en geteste lesdoelstellingen per vraag, zijn terug te vinden in Appendix H.

De toets werd door de 16 leerlingen van Greet Van Herpe afgelegd op vrijdag 18 mei 2018. Met een gemiddelde van 6.9/10 en een mediaan van 7/10 scoorde deze groep iets minder sterk dan de eerste groep seminaristen. Het hoogst behaalde resultaat was 9.5/10. Twee leerlingen slaagden er niet in om de helft van de punten te behalen (hun resultaten bedroegen 3.5/10 en 4/10).
Hieronder volgt opnieuw een beknopte bespreking van mijn bevindingen van de antwoorden van de leerlingen per vraag, inclusief een vergelijking met de andere groep.

Vraag 1
Met deze eerste vraag was het opnieuw de bedoeling dat leerlingen vrij eenvoudig punten konden scoren, aangezien het een voor de hand liggende berekening van een permanent betrof met behulp van de ontwikkeling volgens Laplace. Op enkele reken- en tekenfouten na sloeg ook hier een enkeling de bal mis door expliciet de definitie van de permanent te willen gebruiken.

Vraag 2
Deze vraag werd gemiddeld goed beantwoord. Hoewel bijna iedereen inzag dat enkel voor een $n \times n$-matrix B van oneven orde geldt dat $-\operatorname{per} B = \operatorname{per}(-B)$, gaven sommige leerlingen enkel een verklaring voor vierkante matrices van orde 2 en 3. Twee leerlingen scoorden hier geen punten, omdat ze helaas zelfs geen poging ondernomen hadden om een antwoord op deze vraag te formuleren.

Vraag 3a
Het geven van een tegenvoorbeeld voor de bewering dat voor elke permutatiematrix P van orde 3 verschillend van de eenheidsmatrix geldt dat $\operatorname{per}(P^2) > \operatorname{per} P$, viel nogal tegen. Bijna de helft van alle leerlingen construeerde immers een tegenvoorbeeld met een matrix die verre van een permutatiematrix voorstelde. De definitie van een permutatiematrix heb ik in deze groep nochtans heel duidelijk toegelicht bij de oefeningen op het berekenen van permanenten van bijzondere matrices in de eerste les. Bij deze vraag gingen dus jammerlijk punten verloren.

Vraag 3b
Ook bij het bewijzen van de correcte uitspraak *voor elke* $n \in \mathbb{N}_0$ *slechts één binaire diagonaalmatrix van orde* n *bestaat waarvoor* $\operatorname{per} D \neq 0$ werden fouten gemaakt die ik niet had verwacht. Een aanzienlijk deel van de leerlingen noteerde bijvoorbeeld in hun bewijs dat per definitie van een diagonaalmatrix alle diagonaalelementen identiek moeten zijn, wat uiteraard niet waar is. In de te bewijzen uitspraak was enkel de binaire matrix een nieuw ingevoerde bijzondere matrix; de gedaante van een diagonaalmatrix zou bij de leerlingen al lang gekend moeten zijn en werd bovendien zelfs nog herhaald in de oefeningen in onder meer mijn eerste les. Ik vrees dat het ontbreken van het nemen van de tijd om het correcte inzicht onder woorden te brengen hier voor

velen de oorzaak van het maken van dergelijke fouten was. Nochtans kregen de leerlingen ruim voldoende tijd voor het maken van de toets, want ik vond dat potentiële stress omwille van het tijdsaspect hen geen parten mocht spelen.

Vraag 4

In tegenstelling tot groep A wisten vier leerlingen alle punten te behalen door in de verklaring van de minimale waarde van de permanent van een kolomstochastische[14] matrix expliciet aan te halen waarom een kleinere waarde dan nul onmogelijk is. Bij deze laatste vraag werden opnieuw de meest uiteenlopende punten toegekend, aangezien sommige leerlingen op een verkeerd spoor zaten, al dan niet gedeeltelijk (door bijvoorbeeld de vraag over uniciteit te ontkennen met het aanreiken van verschillende matrices, waarbij het kolomstochastische karakter niet meer in rekening werd gebracht).

Ook over deze afgenomen test luidt mijn slotconclusie dat er een mooie aansluiting was bij de bereikte doelstellingen, bij het niveau van het lessenpakket en bij de in de lessen gelegde accenten.

[14] Merk op dat in de toets van groep A de opgave geformuleerd werd voor rijstochastische matrices. Om exact dezelfde toetsvragen te vermijden, paste ik de vraag aan naar kolomstochastische matrices, waarbij het antwoord uiteraard volledig analoog is en hetzelfde niveau bijgevolg behouden werd.

Algemeen besluit

Permanenten beslaan een zeer brede tak in de wiskunde, met zowel praktische toepassingsgebieden − zoals het oplossen van combinatorische problemen, de aanwending in grafentheorie − als theoretische toepassingsgebieden − zoals het opduiken in de kwantummechanica, de vele boven- en ondergrenzen om de complexe exacte evaluaties van permanenten te benaderen.
Omwille van hun verwantschap met determinanten, kunnen permanenten ook zeer breed worden ingezet in sterke richtingen wiskunde in de hogere jaren van het secundair onderwijs: tal van leerplandoelstellingen, vaardigheden en attitudes zijn immers te koppelen aan een didactisch goed onderbouwde lessenreeks waarbij de basisbeginselen van permanenten centraal staan.

In de onderzoekscomponent vormde het voor mezelf inhoudelijke uitdagingen om me de veelzijdige interpretatiemogelijkheden en toepassingsgebieden van permanenten eigen te maken, om onderverzwegen details en voor de lezer achtergelaten berekeningen in bewijzen bloot te leggen, om definities en afschattingen met eigen voorbeelden te duiden, om klemtonen te leggen en tot een samenhangend geheel te komen.
Ook de didactische component was zeer uitdagend, maar dan vooral op vlak van inschattingen en creativiteit, met onder meer: het selecteren van stukken uit de theorie van permanenten om te hertalen naar een geschikt niveau voor het zesde middelbaar, het opstellen van een gestructureerd en leerrijk lessenpakket, het zelf ontwerpen van oefeningen en toetsvragen aansluitend bij elk onderdeel van dat lessenpakket.

Dat het niet altijd voor de hand ligt om bepaalde wiskundige denkpistes van voorgangers te volgen om tot het bewijs van een bewering omtrent permanenten te komen, daar getuigen het decennialange proces tot het staven van het vermoeden van Van der Waerden en het nog niet algemeen bewezen vermoeden van Dittert van.
Op een ander niveau, maar in dezelfde lijn, konden én kunnen 17- en 18-jarigen uit sterke richtingen wiskunde analoge processen ervaren van onder meer het kritisch analyseren van en het eventueel voortbouwen op elkaars bevindingen, met behulp van het didactische luik dat aan deze masterproef gekoppeld is.

Veel open problemen uit de matrixtheorie en in het bijzonder met betrekking tot permanenten zijn nog onbewezen en blijven wereldwijd wiskundigen triggeren om op zoek te gaan naar een volgende stap of een vernieuwende invalshoek, om anderen te inspireren.
Op een gelijkaardige manier triggert mij de boeiende overdracht van wiskunde naar de klaspraktijk, heeft ook ons onderwijs steeds meer nood aan vernieuwende invalshoeken en hoop ik met mijn lesgeven anderen, jongeren vol potentieel, te enthousiasmeren en inspireren.

Appendices

A English summary

This master thesis contains two components. The first part is a research about the rich theory of the permanent of a square matrix, which can informally be seen as the determinant of a matrix without minus signs. The second part is an educational make-over of sections of the first part with the purpose to teach it.

In the first brief chapter of the first component, some foreknowledge about important special matrices is supplemented, because it will come in handy in proofs of lemmas and theorems in the next chapters several times.

The second chapter is the fundamental basis of this master thesis.
Firstly, after a short history of the origin of the permanent, many properties of (operations with) permanents are stated, proven and illustrated with examples. Out of this properties, with formulas of Herbert J. Ryser and David G. Glynn, some different ways to evaluate permanents are mentioned afterwards. Finally, the purpose of using the permanent function is explained in different interpretations and many practical or theoretical applications, as there are: permanents seen as a special case of the overarching concept of immanents, permanents used by generating functions, the way to handle with permanents as an inner product, some words about the emerging of permanents in quantum physics and the practical use of permanents in combinatorics, in graph theory and in probability theory.
The last section of the second chapter contains some identities and especially many lower and upper bounds for permanents, because of their need to estimate real permanent values, for the sake of the high complexity of computing permanents. After the theorem of Frobenius-König is stated, proven and discussed, the focus lies on inequalities concerning permanents of binary matrices, doubly stochastic matrices and positive semidefinite matrices. The motivation for this focus is threefold: the theorems and their proofs are of a fundamental importance in the theory of permanents, they are fine illustrations of previous handled interpretations of the permanent function or they will be used handy in the sequel of this master thesis.

The third chapter makes the link to the renewed interest in permanents during the last decades: the study of attempts to developments in answers to open questions concerning matrix theory and especially permanent theory. In particular, this chapter is focused on the investigation of one specific question: what is the minimal value the permanent of a doubly stochastic matrix of order n can achieve? The answer $n!/n^n$ was already given by the Dutchman Bartel Leendert van der Waerden in 1926, however its conjecture has been proved for a first time in 1981 by G. P. Egorychev en D. I. Falikman. Many interesting developments and ideas, lemmas and theorems about this conjecture of mathematicians worldwide are discussed in a first section.
In the second section, an alternative proof for the conjecture of Van der Waerden is given from a totally different and more technical input by the Hungarian Béla Gyires.
Finally, the conjecture of Dittert is examined. His statement can be seen as a generalization of the conjecture of Van der Waerden for matrices of order n with the sum of their elements equals n, but is still not proven for $n \geq 4$. The proofs for the cases $n = 2$ and $n = 3$ are mentioned.

The second part of this master thesis is of didactic origin. Pieces out of the first part − the investigation in the theory of permanents − are chosen and adapted to a level to teach high school students with a mathematical interest.

In the first small chapter, the context of this pedagogical part is clarified in brief words about my intention, the motivation and the choice of school.

In the second chapter, it is explained which foreknowledge for the students is required to be able to handle with the theory about permanents and why it is suitable and beautiful to teach a subject like this. Afterwards, the course is discussed. There is a version for the students (attached in Appendix C) and a version for the teacher with additional explanations, suggestions about dealing with the lessons and solutions of the exercises (attached in Appendix D). The content is divided in four parts: coming towards the definition of the permanent, properties of the permanent with focus on comparing with properties of determinants, ways to evaluate permanents and proving some (basic) lower and upper bounds of permanents.

The performance of the course, twice taught in four lessons and followed by a small test for the students, is explained in the last chapter. As well my own impressions as the experiences and the critical views of the students and the teachers are explicitly described.

B Populariserende samenvatting

Dat 'de permanent van een matrix' een tamelijk theoretisch en abstract concept vormt, daar getuigt het eerste luik van deze masterproef van. Hoewel permanenten toch ook diverse toepassingen blijken te hebben, zijn deze minder voor de hand liggend dan de vaak directere toepassingen van determinanten. Desondanks is er van matrices − laat dus staan van determinanten − in de eindtermen wiskunde voor de derde graad aso geen sprake. Gelukkig wordt dit in de leerplannen van de verschillende onderwijskoepels wel opgevangen, maar toch blijft de suggestie om (in de sterke richtingen wiskunde) determinanten te bespreken vanuit hun algemene definitie onbestaande. Het tweede luik van deze thesis tracht vanuit dat gemis een link te leggen tussen het abstracte en een op maat gebrachte weergave ervan voor 17- en 18-jarigen. Deze jongvolwassenen staan met de overgang naar het hoger onderwijs bovendien aan de vooravond van het zetten van een belangrijke stap in hun leven.
Het geeft een enigszins vereerd gevoel om dankzij de uitgevoerde didactische component bij sommige leerlingen iets betekend te hebben door het aanwakkeren van nieuwsgierigheid of interesse, zoals uit informele gesprekken met hen achteraf bleek. Zowel andere leerkrachten als ikzelf kunnen de in detail uitgewerkte lessenreeks ook in de nabije toekomst gebruiken en hiermee anderen − zowel collega's als leerlingen − verder inspireren. Dergelijke innovatieve uitgangspunten betekenen ongetwijfeld een meerwaarde voor verschillende aspecten van het onderwijs. Jongeren inhoudelijk verrijken, blijven investeren in afwisseling in werkvormen (waar het didactisch gedeelte van deze thesis zich zeer mooi toe leent) om jongeren geboeid te houden en hierbij als leerkracht leren loskomen van het klassieke model van onderricht, een brug vormen tussen secundair en hoger onderwijs: het zijn sprekende voorbeelden hiervan. Met totstandkomingen uit het verleden kan er op die manier in het heden vorm gegeven worden aan de toekomst.

C Lessenpakket voor leerlingen

UNIVERSITEIT GENT
FACULTEIT WETENSCHAPPEN
VAKGROEP WISKUNDE

Permanenten

Kwinten Verbruggen

VIERDELIGE LESSENREEKS
SEMINARIE WISKUNDE ZESDE JAAR

Schooljaar 2017-2018

Inhoudsopgave

1 Definitie: opbouw

Het wiskundig concept dat we zullen bestuderen, is de *permanent* van een vierkante matrix. We zullen ontdekken dat er een verwantschap bestaat tussen permanenten en determinanten. Daarom zal het nuttig blijken om de definitie van een determinant in detail te bestuderen − niet voor specifieke vierkante matrices van orde 2 of 3, maar voor willekeurige matrices van orde n. We geven vooraf nog mee dat alle matrices steeds (onderverzwegen) worden beschouwd over $\mathbb{R}$. We gebruiken in deze mini-cursus $A = (a_{ij})$ als verkorte schrijfwijze voor $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

1.1 De symmetrische groep

Definitie 1.1.1. Zij A en B twee verzamelingen en $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(i) Een afbeelding $f : A \to B$ is een **bijectie** als er voor elk element $b \in B$ juist één $a \in A$ bestaat zodat $f(a) = b$.

(ii) Een **permutatie** van $\{1, \ldots, n\}$ is een bijectie $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.
De verzameling van alle permutaties van $\{1, \ldots, n\}$ noemen we de **symmetrische groep** van n elementen en noteren we als $\mathrm{Sym}(n)$ of S_n.

(iii) We stellen een permutatie σ vaak voor door de opeenvolgende beelden $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ tussen haakjes te plaatsen; we noteren dus $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$ waarbij $i_k = \sigma(k)$.

(iv) Zij $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$ een willekeurige permutatie. We kunnen steeds $(i_1, \ldots, i_n)$ omvormen in $(1, \ldots, n)$ door een aantal keer na elkaar twee elementen van plaats te wisselen. Als dit mogelijk is in k stappen, dan definiëren we het **teken** van de permutatie σ als $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$; het teken is dus steeds 1 of −1.

Opmerking 1.1.2. Er bestaan een heel aantal verschillende manieren om $(i_1, \ldots, i_n)$ om te vormen in $(1, \ldots, n)$ door een aantal keer twee elementen van plaats te wisselen. Er kan echter worden aangetoond dat het niet mogelijk is om dit enerzijds te doen in een even aantal stappen en anderzijds in een oneven aantal stappen.

Voorbeeld 1.1.3. (i) Stel $n = 2$. Dan zijn er juist twee permutaties van de verzameling $V = \{1, 2\}$, namelijk:

$$\sigma_1 : V \to V : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \end{cases} \qquad \text{en} \qquad \sigma_2 : V \to V : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1. \end{cases}$$

We noteren $\sigma_1 = (1, 2)$ en $\sigma_2 = (2, 1)$. Er volgt dat $\mathrm{sgn}(\sigma_1) = (-1)^0 = 1$ en $\mathrm{sgn}(\sigma_2) = (-1)^1 = -1$.

(ii) Stel $n = 3$. Dan zijn er juist zes permutaties van de verzameling $V = \{1, 2, 3\}$, namelijk:

$$S_3 = \{(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1)\}.$$

We vinden direct dat $\mathrm{sgn}(1,2,3) = 1$ en dat $\mathrm{sgn}(1,3,2) = \mathrm{sgn}(2,1,3) = \mathrm{sgn}(3,2,1) = -1$. Omdat we zien dat $(2,3,1) \rightsquigarrow (2,1,3) \rightsquigarrow (1,2,3)$, geldt er dat $\mathrm{sgn}(2,3,1) = (-1)^2 = 1$. Op een gelijkaardige manier volgt dat ook $\mathrm{sgn}(3,1,2) = 1$.

Merk op dat het aantal permutaties van S_n, genoteerd als $|S_n|$, gelijk is aan $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1.2 Definitie van een determinant

Alle wiskundige symbolen en concepten die opduiken in de formele definitie van de determinant van een vierkante matrix, hebben we zonet besproken.

Definitie 1.2.1. De **determinant** van een $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ wordt gedefinieerd als

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Voorbeeld 1.2.2. Zij $A = (a_{ij})$ een 2×2-matrix. Uit Voorbeeld 1.1.3 weten we dat de permutaties van S_2 gegeven worden door $\sigma_1 = (1, 2)$ en $\sigma_2 = (2, 1)$ met $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1$ en $\operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1$. Bijgevolg vinden we:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{1,\sigma(1)}\ a_{2,\sigma(2)} \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma_1)\ a_{1,\sigma_1(1)}\ a_{2,\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}(\sigma_2)\ a_{1,\sigma_2(1)}\ a_{2,\sigma_2(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Oefening 1.2.3. Bereken de determinant van een willekeurige 3×3-matrix $A = (a_{ij})$.

1.3 Definitie van een permanent

We komen tot het concept *permanent*. In welke takken van de wiskunde permanenten aan bod komen, wordt verderop toegelicht. We bestuderen eerst de formele definitie.

Definitie 1.3.1. De **permanent** van een $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ wordt gedefinieerd als

$$\operatorname{per} A := \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

1.4 Oefeningen

Oefening 1.4.1. Bereken met behulp van de definitie de permanent van de volgende matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oefening 1.4.2. Zij $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix met dezelfde elementen in elke rij. Vind een algemene formule om $\operatorname{per} A$ uit te drukken.

Oefening 1.4.3. Bereken de permanent van volgende bijzondere matrices van orde n:

(i) de nulmatrix O_n;

(ii) de eenheidsmatrix I_n;

(iii) een diagonaalmatrix D_n;

(iv) een bovendriehoeksmatrix T_n;

(v) een matrix A met een nulrij;

(vi) een permutatiematrix P_n (dit is een matrix waarvan elke rij en elke kolom juist één element 1 bezit en alle andere elementen gelijk zijn aan 0).

2 Eigenschappen

We hebben gezien dat determinanten en permanenten (informeel uitgedrukt) slechts op enkele tekens na van elkaar verschillen. Welke eigenschappen van determinanten gelden hierdoor niet voor permanenten? We gaan dit na door de gekende eigenschappen van determinanten systematisch te overlopen.

2.1 Getransponeerde matrix

TER HERINNERING: $\det A^T = \det A$.

Met behulp van de formele definitie voor de determinant van een willekeurige $n \times n$-matrix A kunnen we het bewijs van deze stelling formuleren als volgt:

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \det A.$$

Vraag 2.1.1. $\operatorname{per} A^T = \operatorname{per} A$?

BESLUIT:
GEVOLG:

2.2 Verwisselen van rijen

TER HERINNERING: indien de matrix B ontstaat door in de matrix A twee rijen van plaats te wisselen, dan geldt: $\det B = -\det A$.
GEVOLG: de determinant van een matrix met twee gelijke rijen is nul.

Vraag 2.2.1. Indien de matrix B ontstaat door in de matrix A twee rijen van plaats te wisselen, geldt dan: $\operatorname{per} B = -\operatorname{per} A$?

Vraag 2.2.2. Indien de matrix B ontstaat door in de matrix A twee rijen van plaats te wisselen, geldt dan: $\operatorname{per} B = \operatorname{per} A$?

BESLUIT:

2.3 Vermenigvuldigen met een reëel getal

Ter herinnering: indien de matrix B ontstaat door in de matrix A alle elementen van een rij met een reëel getal r te vermenigvuldigen, dan geldt: $\det B = r \det A$.
Gevolg I: $\det(rA) = r^n \det A$, met n de orde van A en r een willekeurig reëel getal.
Gevolg II: indien in de matrix A een rij een veelvoud is van één van de andere rijen, geldt: $\det A = 0$.

Vraag 2.3.1. Indien de matrix B ontstaat door in de matrix A alle elementen van een rij met een reëel getal r te vermenigvuldigen, geldt dan: $\operatorname{per} B = r \operatorname{per} A$?

Vraag 2.3.2. Geldt voor een vierkante matrix A van orde n en een willekeurig reëel getal r dat $\operatorname{per}(rA) = r^n \operatorname{per} A$?

Vraag 2.3.3. Indien in de matrix A een rij een veelvoud is van één van de andere rijen, geldt dan: $\operatorname{per} A = 0$?

Besluit: Gevolg:

2.4 Som van rijen

Ter herinnering: als in een determinant een rij de som is van twee termen, dan is die determinant gelijk aan de som van de twee afzonderlijke determinanten.
Gevolg: indien we bij een rij van een matrix een reëel veelvoud van een andere rij optellen, zal de determinant van de matrix ongewijzigd blijven.

Vraag 2.4.1. Als in een matrix een rij de som is van twee termen, is die permanent dan gelijk aan de som van de twee afzonderlijke permanenten?

Vraag 2.4.2. Indien we bij een rij van een matrix een reëel veelvoud van een andere rij optellen, zal de permanent van de matrix dan ongewijzigd blijven?

Besluit:

Opgelet:

2.5 Product van matrices

TER HERINNERING: voor vierkante matrices A en B met dezelfde dimensie geldt: $\det(AB) = \det A \det B$.
GEVOLG: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Vraag 2.5.1. Geldt voor vierkante matrices A en B met dezelfde dimensie dat $\operatorname{per}(AB) = \operatorname{per} A \operatorname{per} B$?

Vraag 2.5.2. Geldt voor een inverteerbare matrix A dat $\operatorname{per}(A^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{per} A}$?

BESLUIT:

OPGELET:

2.6 Oefeningen

Oefening 2.6.1. Beschouw de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Voor welke van onderstaande matrices is de permanent gelijk aan de permanent van A? Vermijd rekenwerk; baseer je op de geziene eigenschappen.

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Oefening 2.6.2. Beschouw de matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & c \\ 0 & d & d \end{pmatrix}$ en $A_\epsilon = \begin{pmatrix} a-\epsilon & \epsilon & 0 \\ b+\epsilon & c-\epsilon & c \\ 0 & d & d \end{pmatrix}$.

Hierbij stelt ϵ een zodanig klein positief reëel getal voor dat ϵ^2 verwaarloosbaar is. Bewijs dan met behulp van de eigenschap in verband met de som van rijen dat per $A_\epsilon = \text{per } A + \epsilon d(b - 2c + a)$.

Oefening 2.6.3. Is de permanent van de som van twee matrices gelijk aan de som van de permanenten van de matrices? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

3 Berekening van permanenten

We weten reeds dat we geen elementaire rij-operaties kunnen toepassen om het rekenwerk bij de berekening van permanenten van matrices te versnellen. Toch bestaan er enkele interessante procedures die ervoor zorgen dat we niet telkens naar de definitie van de permanent moeten teruggrijpen voor de concrete berekening. We lichten de voornaamste toe.

3.1 Ontwikkeling volgens Laplace

Een analoge methode zoals de berekening van de determinant van een matrix door middel van ontwikkeling naar een rij of kolom (ook gekend onder de regel van Laplace), kan ook worden gebruikt voor de berekening van de permanent van een vierkante matrix. We voeren hiertoe eerst enkele notaties in.

Notatie 3.1.1. Zij $\Gamma_{r,n}$ de verzameling van alle n^r rijen $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ van natuurlijke getallen, waarbij $1 \leq \omega_i \leq n$, met $i = 1, \ldots, r$. Dan noteren we met $G_{r,n}$ de deelverzameling van $\Gamma_{r,n}$ die bestaat uit alle $\binom{n+r-1}{r}$ niet-dalende rijen, dus

$$G_{r,n} := \{(\omega_1, \ldots, \omega_r) | 1 \leq \omega_1 \leq \ldots \leq \omega_r \leq n\}$$

en $Q_{r,n}$ stelt de deelverzameling voor van de $\binom{n}{r}$ stijgende rijen, met andere woorden:

$$Q_{r,n} := \{(\omega_1, \ldots, \omega_r) | 1 \leq \omega_1 < \ldots < \omega_r \leq n\}.$$

Voor $\omega \in G_{r,n}$ noteren we met $\mu(\omega)$ het product van de faculteiten van het aantal keren dat de verschillende natuurlijke getallen in ω voorkomen.

Voorbeeld 3.1.2. $\mu(1, 3, 3, 4, 6, 6, 6, 9) = 1!\ 2!\ 1!\ 3!\ 1! = 12.$

Definitie 3.1.3. (i) Indien $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix is en $\omega, \tau \in \Gamma_{r,n}$, dan noteren we met $A[\omega|\tau]$ de $r \times r$-matrix waarvan het element op positie (s, t) gelijk is aan $a_{\omega_s \tau_t}$.
Per conventie geldt dat per $A[\omega|\tau] = 1$ als $r = 0$.

(ii) Indien $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix is en $\omega, \tau \in Q_{r,n}$, dan stelt $A(\omega|\tau)$ de $(n-r) \times (n-r)$-deelmatrix van A voor complementair aan $A[\omega|\tau]$. Met andere woorden: $A(\omega|\tau)$ is de matrix waarin rijen ω en kolommen τ geschrapt zijn ten opzichte van A.
Per conventie geldt dat $\operatorname{per} B(\omega|\tau) = \operatorname{per} B$ als $r = 0$, en $\operatorname{per} B(\omega|\tau) = 1$ als $r = n$.

Stelling 3.1.4 (Expansie van Laplace)**.** *Zij $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix en $\alpha \in Q_{r,n}$, voor een willekeurige natuurlijke $r \in [0, n]$. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A = \sum_{\omega \in Q_{r,n}} \operatorname{per} A[\omega|\alpha] \ \operatorname{per} A(\omega|\alpha).$$

In het bijzonder geldt voor alle i, $1 \leq i \leq n$,

$$\operatorname{per} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per} A(i|j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per} A(i|j).$$

Voorbeeld 3.1.5. Beschouw de volgende matrix van orde 4:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

We berekenen $\operatorname{per} A$ met behulp van de expansiestelling van Laplace. Zij $r = 2$ en $\alpha = (1, 2)$. Dan vinden we: $Q_{2,4} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$ en

$$\begin{aligned}
\operatorname{per} A &= \operatorname{per} A[1,2|1,2] \ \operatorname{per} A(1,2|1,2) + \operatorname{per} A[1,3|1,2] \ \operatorname{per} A(1,3|1,2) \\
&\quad + \operatorname{per} A[1,4|1,2] \ \operatorname{per} A(1,4|1,2) + \operatorname{per} A[2,3|1,2] \ \operatorname{per} A(2,3|1,2) \\
&\quad + \operatorname{per} A[2,4|1,2] \ \operatorname{per} A(2,4|1,2) + \operatorname{per} A[3,4|1,2] \ \operatorname{per} A(3,4|1,2) \\
&= 1 \cdot 8 + 8 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 4 \cdot 8 + 0 \cdot 12 + 4 \cdot (-1) \\
&= 47.
\end{aligned}$$

Oefening 3.1.6. Ontwikkel de matrix A uit Voorbeeld 3.1.5 naar de eerste rij.

Oefening 3.1.7. Herbereken de permanenten van matrices B en C uit Oefening 1.4.1 door de matrices te ontwikkelen met behulp van de stelling van Laplace.

3.2 Alternatieve methodes

De berekening van de permanent van een $n \times n$-matrix met behulp van de definitie of met de ontwikkeling van Laplace is voor grote n een heel tijdsrovend proces, zelfs voor computers. Het is dan ook niet verwonderlijk dat pogingen ondernomen zijn om de complexiteit van het berekenen van permanenten te reduceren.
Zo ontwikkelde de Australische wiskundige David G. Glynn in 2010 bijvoorbeeld enkele alternatieve formules om de permanent van een $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ te berekenen. De eenvoudigste van deze formules luidt, met $\mathbb{B}_n = \{v = (v_1, \ldots, v_n) \in \{-1, 1\}^n \mid v_1 = 1\}$:

$$\operatorname{per} A = 2^{1-n} \sum_{v \in \mathbb{B}_n} \left(\prod_{j=1}^{n} v_j \right) \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j.$$

Oefening 3.2.1. Ga de correctheid van bovenstaande formule na voor de permanent van een willekeurige 2×2-matrix.

4 Afschattingen

Juist omwille van de moeilijkheid van het berekenen van permanenten, hebben verschillende wiskundigen gezocht naar boven- en ondergrenzen om permanenten te benaderen. Tot op vandaag blijven er echter nog veel uitspraken of afschattingen met betrekking tot permanenten onbewezen, hoewel het vermoeden dat ze correct zijn vaak groot is. Door enkele vrij recente ontwikkelingen die lang bestaande vermoedens konden bevestigen of ontkrachten, is er de voorbije decennia een hernieuwde interesse ontstaan in (begrenzingen met betrekking tot) permanenten.

4.1 Inleidende begrenzingen

We tonen een eerste basisafschatting aan.

Stelling 4.1.1. *Zij A een willekeurige vierkante matrix. Dan geldt:*

$$|\operatorname{per} A| \leq \operatorname{per} |A|.$$

Bewijs. STAP 1. Bewijs de driehoeksongelijkheid: voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt: $|x+y| \leq |x| + |y|$.

STAP 2. Hoe volgt het gestelde nu uit de veralgemening van de driehoeksongelijkheid?

□

In wiskundige artikels uit de negentiende eeuw verschenen permanenten in ongelijkheden vaak in combinatie met determinanten. De bewijzen zijn dikwijls lang en complex. Een elementair resultaat zullen we hier echter wel bewijzen.

Stelling 4.1.2. *Zij $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix met $a_{ij} \geq 0$ voor elk element van A. Dan geldt:*

$$|\det A| \leq \operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} r_i,$$

waarbij r_i de som van de elementen op de i-de rij van A voorstelt, dus $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

Bewijs. STAP 1. Bewijs de eerste ongelijkheid met behulp van de driehoeksongelijkheid in de volgende vorm: $|a - b| \leq |a| + |b|$.

STAP 2. Bewijs de tweede ongelijkheid door gebruik te maken van de distributieve uitwerking van het product van alle rijsommen van A.

□

4.2 Binaire matrices

Definitie 4.2.1. Een **binaire matrix** of **(0,1)-matrix** is een matrix waarin elk element gelijk is aan 0 of 1.

Binaire matrices spelen onder meer een interessante rol in lineaire algebra en combinatoriek. Deze matrices vormen daarom vaak een aparte categorie waarbinnen gezocht wordt naar boven- en ondergrenzen voor de permanent.

Vraag 4.2.2. Wat is de maximale waarde die de permanent van een vierkante binaire matrix van orde n kan bereiken? Wordt deze waarde bereikt voor een unieke binaire matrix?

Vraag 4.2.3. Wat is de minimale waarde die de permanent van een vierkante binaire matrix van orde n kan bereiken? Wordt deze waarde bereikt voor een unieke binaire matrix?

4.3 Dubbelstochastische matrices

Definitie 4.3.1. (i) Een **stochastische matrix**, ook wel een waarschijnlijkheidsmatrix of overgangsmatrix genoemd, is een matrix (a_{ij}) waar voor alle i, j geldt dat $0 \leq a_{ij} \leq 1$.

(ii) Een **rijstochastische matrix** is een matrix (a_{ij}) waar voor alle i, j geldt dat $0 \leq a_{ij}$ en $\sum_j a_{ij} = 1$, dus waarvoor elke rijsom gelijk is aan 1.

(iii) Analoog definieert men een **kolomstochastische matrix** als een matrix (a_{ij}) waar voor alle i, j geldt dat $0 \leq a_{ij}$ en $\sum_i a_{ij} = 1$, dus met de kolomsommen gelijk aan aan 1.

(iv) Een **dubbelstochastische matrix** is dan een matrix (a_{ij}) waar voor alle i, j geldt dat $0 \leq a_{ij}$ en $\sum_i a_{ij} = \sum_j a_{ij} = 1$.

Ook dubbelstochastische matrices vormen een interessante aparte klasse van matrices, met onder meer toepassingen in de kansberekening.

Oefening 4.3.2. Bewijs dat dubbelstochastische matrices altijd vierkante matrices zijn.

Vraag 4.3.3. Wat is de maximale waarde die de permanent van een dubbelstochastische matrix van orde n kan bereiken? Wordt deze waarde bereikt voor een unieke dubbelstochastische matrix?

Vraag 4.3.4. Wat is de minimale waarde die de permanent van een dubbelstochastische matrix van orde n kan bereiken? Wordt deze waarde bereikt voor een unieke dubbelstochastische matrix?

D Lessenpakket voor leerkrachten

Universiteit Gent
Faculteit Wetenschappen
Vakgroep Wiskunde

Permanenten

Kwinten Verbruggen

Vierdelige lessenreeks
Seminarie wiskunde zesde jaar

Schooljaar 2017-2018

Inhoudsopgave

1 Definitie: opbouw

Het wiskundig concept dat we zullen bestuderen, is de *permanent* van een vierkante matrix. We zullen ontdekken dat er een verwantschap bestaat tussen permanenten en determinanten. Daarom zal het nuttig blijken om de definitie van een determinant in detail te bestuderen − niet voor specifieke vierkante matrices van orde 2 of 3, maar voor willekeurige matrices van orde n. We geven vooraf nog mee dat alle matrices steeds (onderverzwegen) worden beschouwd over $\mathbb{R}$. We gebruiken in deze mini-cursus $A = (a_{ij})$ als verkorte schrijfwijze voor $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Aanvulling voor de leerkracht.
Deze eerste paragraaf bevat nieuwe wiskundige concepten, die bij voorkeur met een doceerstijl of via een onderwijsleergesprek worden aangereikt.

1.1 De symmetrische groep

Definitie 1.1.1. Zij A en B twee verzamelingen en $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(i) Een afbeelding $f : A \to B$ is een **bijectie** als er voor elk element $b \in B$ juist één $a \in A$ bestaat zodat $f(a) = b$.

(ii) Een **permutatie** van $\{1, \ldots, n\}$ is een bijectie $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.
De verzameling van alle permutaties van $\{1, \ldots, n\}$ noemen we de **symmetrische groep** van n elementen en noteren we als $\mathrm{Sym}(n)$ of S_n.

(iii) We stellen een permutatie σ vaak voor door de opeenvolgende beelden $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ tussen haakjes te plaatsen; we noteren dus $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$ waarbij $i_k = \sigma(k)$.

(iv) Zij $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$ een willekeurige permutatie. We kunnen steeds $(i_1, \ldots, i_n)$ omvormen in $(1, \ldots, n)$ door een aantal keer na elkaar twee elementen van plaats te wisselen. Als dit mogelijk is in k stappen, dan definiëren we het **teken** van de permutatie σ als $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$; het teken is dus steeds 1 of -1.

Opmerking 1.1.2. Er bestaan een heel aantal verschillende manieren om $(i_1, \ldots, i_n)$ om te vormen in $(1, \ldots, n)$ door een aantal keer twee elementen van plaats te wisselen. Er kan echter worden aangetoond dat het niet mogelijk is om dit enerzijds te doen in een even aantal stappen en anderzijds in een oneven aantal stappen.

Voorbeeld 1.1.3. (i) Stel $n = 2$. Dan zijn er juist twee permutaties van de verzameling $V = \{1, 2\}$, namelijk:

$$\sigma_1 : V \to V : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \end{cases} \qquad \text{en} \quad \sigma_2 : V \to V : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1. \end{cases}$$

We noteren $\sigma_1 = (1, 2)$ en $\sigma_2 = (2, 1)$. Er volgt dat $\mathrm{sgn}(\sigma_1) = (-1)^0 = 1$ en $\mathrm{sgn}(\sigma_2) = (-1)^1 = -1$.

(ii) Stel $n = 3$. Dan zijn er juist zes permutaties van de verzameling $V = \{1, 2, 3\}$, namelijk:

$$S_3 = \{(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1)\}.$$

We vinden direct dat $\operatorname{sgn}(1,2,3) = 1$ en dat $\operatorname{sgn}(1,3,2) = \operatorname{sgn}(2,1,3) = \operatorname{sgn}(3,2,1) = -1$. Omdat we zien dat $(2,3,1) \rightsquigarrow (2,1,3) \rightsquigarrow (1,2,3)$, geldt er dat $\operatorname{sgn}(2,3,1) = (-1)^2 = 1$. Op een gelijkaardige manier volgt dat ook $\operatorname{sgn}(3,1,2) = 1$.

Merk op dat het aantal permutaties van S_n, genoteerd als $|S_n|$, gelijk is aan $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1.2 Definitie van een determinant

Alle wiskundige symbolen en concepten die opduiken in de formele definitie van de determinant van een vierkante matrix, hebben we zonet besproken.

Definitie 1.2.1. De **determinant** van een $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ wordt gedefinieerd als

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Aanvulling voor de leerkracht.

De leerlingen zijn mogelijk nog niet vertrouwd met de compacte product-notatie. Deze hoeft niet noodzakelijk ingevoerd te worden, maar zal verderop in oefeningen en bewijzen wel handig kunnen worden aangewend.

Voorbeeld 1.2.2. Zij $A = (a_{ij})$ een 2×2-matrix. Uit Voorbeeld 1.1.3 weten we dat de permutaties van S_2 gegeven worden door $\sigma_1 = (1,2)$ en $\sigma_2 = (2,1)$ met $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1$ en $\operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1$. Bijgevolg vinden we:

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{1,\sigma(1)}\ a_{2,\sigma(2)} \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma_1)\ a_{1,\sigma_1(1)}\ a_{2,\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}(\sigma_2)\ a_{1,\sigma_2(1)}\ a_{2,\sigma_2(2)} \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.
\end{aligned}$$

Oefening 1.2.3. Bereken de determinant van een willekeurige 3×3-matrix $A = (a_{ij})$.

Oplossing. Uit Voorbeeld 1.1.3 weten we al dat

$$\begin{aligned}
S_3 = \{&(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1)\},\ \text{met} \\
&\operatorname{sgn}(1,2,3) = \operatorname{sgn}(2,3,1) = \operatorname{sgn}(3,1,2) = 1 \text{ en} \\
&\operatorname{sgn}(1,3,2) = \operatorname{sgn}(2,1,3) = \operatorname{sgn}(3,2,1) = -1.
\end{aligned}$$

Er volgt dan:

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{1,\sigma(1)}\ a_{2,\sigma(2)}\ a_{3,\sigma(3)} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{13} + a_{13}a_{12}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

1.3 Definitie van een permanent

We komen tot het concept *permanent*. In welke takken van de wiskunde permanenten aan bod komen, wordt verderop toegelicht. We bestuderen eerst de formele definitie.

Definitie 1.3.1. De **permanent** van een $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ wordt gedefinieerd als

$$\operatorname{per} A := \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Aanvulling voor de leerkracht.

Informeel uitgedrukt is een permanent dus een determinant zonder mintekens. Het is belangrijk de leerlingen hier attent op te maken.

Op dit punt gekomen, is het ook interessant de leerlingen kort te duiden op het praktisch nut van permanenten. Waar determinanten een belangrijke rol spelen in de ruimtemeetkunde, kennen permanenten andere toepassingsgebieden. Op enkele problemen uit de kansrekening (en grafentheorie) na, hebben permanenten voornamelijk een plaats in diepgaandere wiskunde en in aanverwante takken zoals de theoretische fysica (meer bepaald de kwantummechanica). Onder meer omwille van het versterken van de voeling met abstractere wiskundige concepten en het verscherpen van het redeneervermogen is de beknopte verdieping in permanenten die de leerlingen hier ondergaan zeker een meerwaarde.

1.4 Oefeningen

Aanvulling voor de leerkracht.

Bij het oplossen van de volgende oefeningen op permanenten is het nuttig om de leerlingen er op te wijzen dat ze de bestaande regels om determinanten te berekenen van vierkante matrices van orde 3 kunnen toepassen (driehoeksregel, regel van Sarrus), hetzij in de variant zonder mintekens. Als leerlingen zouden vragen of een analogon van de ontwikkeling naar een rij of kolom ook nog opgaat, kan de leerkracht dit hier al bevestigen en vooruitblikken naar de derde paragraaf.

Oefening 1.4.1. Bereken met behulp van de definitie de permanent van de volgende matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oplossing.

$$\operatorname{per} A = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 8 = -13, \quad \operatorname{per} B = -1 - 84 + 0 + 6 + 21 + 0 = -58, \quad \operatorname{per} C = 10.$$

Aanvulling voor de leerkracht.

In onderstaande oefening is het aan te raden de leerlingen te wijzen op de interpretatie van een permanent als de som van alle mogelijke producten wqarbij elke factor een element is afkomstig uit een andere rij en kolom van de betreffende matrix.

Oefening 1.4.2. Zij $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix met dezelfde elementen in elke rij. Vind een algemene formule om $\operatorname{per} A$ uit te drukken.

Oplossing. Er is gegeven dat $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$. In de berekening van $\operatorname{per} A$ bevat elke term juist één element van elke rij en elke kolom van A, dus moet elke term gelijk zijn aan $a_{11} \cdots a_{1n}$. Omdat $|S_n| = n!$, komt deze term $n!$ keer voor in de uitwerking van de permanent. We besluiten dat $\operatorname{per} A = n! \prod_{i=1}^{n} a_{1n}$.

Aanvulling voor de leerkracht.
Onderstaande oefening is een mooie opfrissing van enkele bijzondere matrices. Mogelijkheid tot differentiatie: leerlingen die snel klaar zijn, kunnen nagaan voor welke matrices de determinant samenvalt met de permanent en bovendien proberen inzien hoe dit te verklaren valt.

Oefening 1.4.3. Bereken de permanent van volgende bijzondere matrices van orde n:

(i) de nulmatrix O_n;

(ii) de eenheidsmatrix I_n;

(iii) een diagonaalmatrix D_n;

(iv) een bovendriehoeksmatrix T_n;

(v) een matrix A met een nulrij;

(vi) een permutatiematrix P_n (dit is een matrix waarvan elke rij en elke kolom juist één element 1 bezit en alle andere elementen gelijk zijn aan 0).

Oplossing.

$$\operatorname{per}(O_n) = 0, \quad \operatorname{per}(I_n) = 1, \quad \operatorname{per}(D_n) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}, \quad \operatorname{per}(T_n) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}, \quad \operatorname{per} A = 0, \quad \operatorname{per}(P_n) = 1.$$

2 Eigenschappen

We hebben gezien dat determinanten en permanenten (informeel uitgedrukt) slechts op enkele tekens na van elkaar verschillen. Welke eigenschappen van determinanten gelden hierdoor niet voor permanenten? We gaan dit na door de gekende eigenschappen van determinanten systematisch te overlopen.

2.1 Getransponeerde matrix

Ter herinnering: $\det A^T = \det A$.

Bewijs.

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \det A. \qquad \square$$

Aanvulling voor de leerkracht.
Bij sommige bewijzen van eigenschappen van permanenten kan het inzichtelijk een troef zijn om de overeenkomstige eigenschap met betrekking tot determinanten (opnieuw) te bewijzen, gebruik makend van de formele definitie van een determinant. Zo volgt de invariantie van de determinant van een vierkante matrix onder transpositie bijvoorbeeld direct uit de formele definitie van de determinant, zoals hierboven aangegeven.

Vraag 2.1.1. per $A^T = \operatorname{per} A$?

Bewijs. Volgt direct uit de definitie van de permanent: zij $A = (a_{ij})$ een vierkante matrix van orde n, dan geldt:

$$\operatorname{per} A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \operatorname{per} A. \qquad \square$$

BESLUIT: per $A^T = \operatorname{per} A$. GEVOLG: alle eigenschappen die gelden voor rijen, gelden ook voor kolommen.

Aanvulling voor de leerkracht.
De leerlingen zijn het niet gewoon om redeneringen op te bouwen met abstracte definities. Het zoekproces om te komen tot het correct beantwoorden van de vragen in deze paragraaf is minstens zo belangrijk als de eigenlijke formulering van het bewijs indien de uitspraak waar is. Daarom volstaat het de leerlingen de bewijzen te laten noteren voor willekeurige vierkante matrices van orde 2 en/of 3, hoogstwaarschijnlijk naar analogie van de analoge opgestelde bewijzen voor determinanten uit eerdere wiskundelessen. Voor de volledigheid staan de eigenschappen hieronder wel bewezen voor willekeurige $n \times n$-matrices.
Een aan te raden werkvorm die vanaf hier kan worden toegepast, is de opsplisting van de leerlingen in groepjes van ongeveer drie. Ze kunnen elkaar versterken en aanvullen in het zoekproces en de redeneringen (bijv. bij het vinden van een ander tegenvoorbeeld). De leerkracht stapt bij voorkeur rond in zijn rol als begeleider van leerprocessen en noteert of projecteert de uiteindelijke besluiten vooraan als bevestiging en leidraad voor de leerlingen.

2.2 Verwisselen van rijen

TER HERINNERING: indien de matrix B ontstaat door in de matrix A twee rijen van plaats te wisselen, dan geldt: $\det B = -\det A$.
GEVOLG: de determinant van een matrix met twee gelijke rijen is nul.

Vraag 2.2.1. Indien de matrix B ontstaat door in de matrix A twee rijen van plaats te wisselen, geldt dan: $\operatorname{per} B = -\operatorname{per} A$?

Tegenvoorbeeld. Zij a, b, c, d willekeurige reële getallen verschillend van nul. Dan vinden we:

$$\operatorname{per} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + bc \neq -ad - bc = -\operatorname{per} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Uit het tegenvoorbeeld halen we het volgende vermoeden.

Vraag 2.2.2. Indien de matrix B ontstaat door in de matrix A twee rijen van plaats te wisselen, geldt dan: $\operatorname{per} B = \operatorname{per} A$?

Bewijs. Zij $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix en $1 \leq k < l \leq n$ en zij B de matrix bekomen door in A de k-de rij met de l-de rij van plaats te wisselen. Per definitie van de permanent volgt dan:

$$\begin{aligned} \operatorname{per} A &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{k,\sigma(k)} \cdots a_{l,\sigma(l)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{l,\sigma(l)} \cdots a_{k,\sigma(k)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \operatorname{per} B. \end{aligned} \qquad \square$$

BESLUIT: indien de matrix B ontstaat door in de matrix A twee rijen van plaats te wisselen, dan geldt: $\operatorname{per} B = \operatorname{per} A$.

Merk op dat een analoog gevolg zoals bij determinanten nu niet kan worden geconcludeerd.

2.3 Vermenigvuldigen met een reëel getal

TER HERINNERING: indien de matrix B ontstaat door in de matrix A alle elementen van een rij met een reëel getal r te vermenigvuldigen, dan geldt: $\det B = r \det A$.
GEVOLG I: $\det(rA) = r^n \det A$, met n de orde van A en r een willekeurig reëel getal.
GEVOLG II: indien in de matrix A een rij een veelvoud is van één van de andere rijen, geldt: $\det A = 0$.

Vraag 2.3.1. Indien de matrix B ontstaat door in de matrix A alle elementen van een rij met een reëel getal r te vermenigvuldigen, geldt dan: $\operatorname{per} B = r \operatorname{per} A$?

Bewijs. Zij B de matrix gelijk aan A, behalve de i-de rij van B: die is gelijk aan de i-de rij van A vermenigvuldigd met een reële factor r. Elke term in de uitwerking van $\operatorname{per} B$ bevat per definitie van de permanent een factor van de i-de rij, dus elke term in de uitwerking van $\operatorname{per} B$ bevat juist een factor r. Wanneer we deze factor afzonderen, volgt het resultaat. □

Vraag 2.3.2. Geldt voor een vierkante matrix A van orde n en een willekeurig reëel getal r dat $\operatorname{per}(rA) = r^n \operatorname{per} A$?

Bewijs. Dit is een direct gevolg uit het voorgaande. □

Vraag 2.3.3. Indien in de matrix A een rij een veelvoud is van één van de andere rijen, geldt dan: $\operatorname{per} A = 0$?

Tegenvoorbeeld. Zij a, b, r willekeurige reële getallen verschillend van nul. Dan vinden we:

$$\operatorname{per}\begin{pmatrix} a & b \\ r \cdot a & r \cdot b \end{pmatrix} = 2rab \neq 0.$$

BESLUIT: indien de matrix B ontstaat door in de matrix A alle elementen van een rij met een reëel getal r te vermenigvuldigen, geldt: $\operatorname{per} B = r\ \operatorname{per} A$.
GEVOLG: $\operatorname{per}(rA) = r^n \operatorname{per} A$, met n de orde van A en r een willekeurig reëel getal.

2.4 Som van rijen

TER HERINNERING: als in een determinant een rij de som is van twee termen, dan is die determinant gelijk aan de som van de twee afzonderlijke determinanten.
GEVOLG: indien we bij een rij van een matrix een reëel veelvoud van een andere rij optellen, zal de determinant van de matrix ongewijzigd blijven.

Vraag 2.4.1. Als in een matrix een rij de som is van twee termen, is die permanent dan gelijk aan de som van de twee afzonderlijke permanenten?

Bewijs. Zij $A = (a_{ij})$ de $n \times n$-matrix waarin $a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$ voor elke kolom j en voor een willekeurige $1 \leq k \leq n$. Dan vinden we:

$$\begin{aligned}
\operatorname{per} A &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{k,\sigma(k)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots \big(b_{k,\sigma(k)} + c_{k,\sigma(k)}\big) \cdots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots b_{k,\sigma(k)} \cdots a_{n,\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots c_{k,\sigma(k)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

□

Vraag 2.4.2. Indien we bij een rij van een matrix een reëel veelvoud van een andere rij optellen, zal de permanent van de matrix dan ongewijzigd blijven?

Tegenvoorbeeld. Zij a, b, c, d, r willekeurige reële getallen en $a, b, r \neq 0$. Dan geldt:

$$\operatorname{per} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + bc \neq ad + 2rab + bc = \operatorname{per} \begin{pmatrix} a & b \\ c + ra & d + rb \end{pmatrix}.$$

BESLUIT: als in een permanent een rij de som is van twee termen, dan is die permanent gelijk aan de som van de twee afzonderlijke permanenten.

OPGELET: we kunnen GEEN elementaire rij-operaties toepassen om permanenten te berekenen.

Aanvulling voor de leerkracht.
Het belang van bovenstaande opmerking mag hier zeker benadrukt worden, het vormt immers de basis voor de derde paragraaf verderop.

2.5 Product van matrices

TER HERINNERING: voor vierkante matrices A en B met dezelfde dimensie geldt:
$\det(AB) = \det A \det B$.
GEVOLG: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Vraag 2.5.1. Geldt voor vierkante matrices A en B met dezelfde dimensie dat
$\operatorname{per}(AB) = \operatorname{per} A \operatorname{per} B$?

Tegenvoorbeeld.

$$8 = \operatorname{per} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \operatorname{per} \Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \Big) \neq \operatorname{per} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \operatorname{per} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 4.$$

Vraag 2.5.2. Geldt voor een inverteerbare matrix A dat $\operatorname{per}(A^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{per} A}$?

Tegenvoorbeeld. In tegenstelling tot de determinant geeft de permanent geen informatie over het al of niet inverteerbaar zijn van een vierkante matrix. Zo vinden we bijvoorbeeld dat $\operatorname{per} \left(\begin{smallmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{smallmatrix}\right) = 0.5$ voor de singuliere matrix J_n, terwijl de matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ inverteerbaar is en $\operatorname{per} A = 0$.

OPGELET: de permanent van het product van matrices is NIET gelijk aan het product van de respectieve permanenten.

2.6 Oefeningen

Aanvulling voor de leerkracht.
Oefening 2.6.1 is een standaardoefening die de kennis van bovenstaande eigenschappen test; oefening 2.6.2 is een uitbreidingsoefening (bijvoorbeeld in te zetten als differentiatie voor de leerlingen die vrij snel zouden klaar zijn met het samenwerkend onderzoek in de vorige sectie); oefening 2.6.3 is een interessante denkoefening, die in dezelfde lijn ligt als het onderzoek dat de leerlingen hebben uitgevoerd om tot de eigenschappen van permanenten te komen.

Oefening 2.6.1. Beschouw de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Voor welke van onderstaande matrices is de permanent gelijk aan de permanent van A? Vermijd rekenwerk; baseer je op de geziene eigenschappen.

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Oplossing. We verkrijgen B uit A door achtereenvolgens een cyclische permutatie van de kolommen van A door te voeren en de eerste en derde rij van plaats te wisselen, dus $\operatorname{per} B = \operatorname{per} A$.
De matrix C is de getransponeerde van A, dus $\operatorname{per} C = \operatorname{per} A$.
Matrix D bekomen we uit A door een factor 3 af te zonderen uit de laatste kolom en de eerste rij van A met 3 te vermenigvuldigen, dus $\operatorname{per} D = \operatorname{per} A$.
Tot slot is $\operatorname{per} E \neq \operatorname{per} A$, want de permanent van een matrix is niet invariant onder het permuteren van de elementen van een enkele rij.

Oefening 2.6.2. Beschouw de matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & c \\ 0 & d & d \end{pmatrix}$ en $A_\epsilon = \begin{pmatrix} a-\epsilon & \epsilon & 0 \\ b+\epsilon & c-\epsilon & c \\ 0 & d & d \end{pmatrix}$.
Hierbij stelt ϵ een zodanig klein positief reëel getal voor dat ϵ^2 verwaarloosbaar is.
Bewijs dan met behulp van de eigenschap in verband met de som van rijen dat
$\operatorname{per} A_\epsilon = \operatorname{per} A + \epsilon d(b - 2c + a)$.

Oplossing. Gebruik makend van de vermelde eigenschap, de berekening van permanenten van matrices van orde 3 en het feit dat ϵ^2 (bij benadering) nul is, kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} \operatorname{per} A_\epsilon &= \operatorname{per} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & c \\ 0 & d & d \end{pmatrix} + \operatorname{per} \begin{pmatrix} -\epsilon & \epsilon & 0 \\ b & c & c \\ 0 & d & d \end{pmatrix} + \operatorname{per} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \epsilon & -\epsilon & 0 \\ 0 & d & d \end{pmatrix} + \operatorname{per} \begin{pmatrix} -\epsilon & \epsilon & 0 \\ \epsilon & -\epsilon & 0 \\ 0 & d & d \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{per} A - 2\epsilon cd + \epsilon bd - a\epsilon d + 2d\epsilon^2 \\ &= \operatorname{per} A + \epsilon d(b - 2c + a). \end{aligned}$$

Oefening 2.6.3. Is de permanent van de som van twee matrices gelijk aan de som van de permanenten van de matrices? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Oplossing. De bewering is vals; een tegenvoorbeeld wordt bijvoorbeeld gegeven door:

$$8 = \operatorname{per}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \operatorname{per}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) \neq \operatorname{per}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) + \operatorname{per}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 4.$$

3 Berekening van permanenten

We weten reeds dat we geen elementaire rij-operaties kunnen toepassen om het rekenwerk bij de berekening van permanenten van matrices te versnellen. Toch bestaan er enkele interessante procedures die ervoor zorgen dat we niet telkens naar de definitie van de permanent moeten teruggrijpen voor de concrete berekening. We lichten de voornaamste toe.

Aanvulling voor de leerkracht.

Onderstaande notaties en definities zijn technisch van aard en niet eenvoudig. Wanneer er voor de totale lessenreeks over permanenten vier lestijden worden uitgerokken, wordt dit onderdeel bij voorkeur dan ook niet expliciet klassikaal behandeld. Leergierige en sterke leerlingen kunnen zich hier vrijblijvend thuis wel in verdiepen − vandaar dat het aan te raden is deze sectie toch optioneel in hun cursus te laten staan.

3.1 Ontwikkeling volgens Laplace

Een analoge methode zoals de berekening van de determinant van een matrix door middel van ontwikkeling naar een rij of kolom (ook gekend onder de regel van Laplace), kan ook worden gebruikt voor de berekening van de permanent van een vierkante matrix. We voeren hiertoe eerst enkele notaties in.

Notatie 3.1.1. Zij $\Gamma_{r,n}$ de verzameling van alle n^r rijen $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ van natuurlijke getallen, waarbij $1 \leq \omega_i \leq n$, met $i = 1, \ldots, r$. Dan noteren we met $G_{r,n}$ de deelverzameling van $\Gamma_{r,n}$ die bestaat uit alle $\binom{n+r-1}{r}$ niet-dalende rijen, dus

$$G_{r,n} := \{(\omega_1, \ldots, \omega_r) | 1 \leq \omega_1 \leq \ldots \leq \omega_r \leq n\}$$

en $Q_{r,n}$ stelt de deelverzameling voor van de $\binom{n}{r}$ stijgende rijen, met andere woorden:

$$Q_{r,n} := \{(\omega_1, \ldots, \omega_r) | 1 \leq \omega_1 < \ldots < \omega_r \leq n\}.$$

Voor $\omega \in G_{r,n}$ noteren we met $\mu(\omega)$ het product van de faculteiten van het aantal keren dat de verschillende natuurlijke getallen in ω voorkomen.

Voorbeeld 3.1.2. $\mu(1, 3, 3, 4, 6, 6, 6, 9) = 1!\ 2!\ 1!\ 3!\ 1! = 12.$

Definitie 3.1.3. (i) Indien $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix is en $\omega, \tau \in \Gamma_{r,n}$, dan noteren we met $A[\omega|\tau]$ de $r \times r$-matrix waarvan het element op positie (s, t) gelijk is aan $a_{\omega_s \tau_t}$.
Per conventie geldt dat $\operatorname{per} A[\omega|\tau] = 1$ als $r = 0$.

(ii) Indien $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix is en $\omega, \tau \in Q_{r,n}$, dan stelt $A(\omega|\tau)$ de $(n-r) \times (n-r)$-deelmatrix van A voor complementair aan $A[\omega|\tau]$. Met andere woorden: $A(\omega|\tau)$ is de matrix waarin rijen ω en kolommen τ geschrapt zijn ten opzichte van A.
Per conventie geldt dat $\operatorname{per} B(\omega|\tau) = \operatorname{per} B$ als $r = 0$, en $\operatorname{per} B(\omega|\tau) = 1$ als $r = n$.

Stelling 3.1.4 (Expansie van Laplace)**.** *Zij* $A = (a_{ij})$ *een* $n \times n$*-matrix en* $\alpha \in Q_{r,n}$*, voor een willekeurige natuurlijke* $r \in [0, n]$*. Dan geldt:*

$$\operatorname{per} A = \sum_{\omega \in Q_{r,n}} \operatorname{per} A[\omega|\alpha] \;\operatorname{per} A(\omega|\alpha).$$

In het bijzonder geldt, respectievelijk voor alle j $(1 \leq j \leq n)$ *en alle* i $(1 \leq i \leq n)$*:*

$$\operatorname{per} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per} A(i|j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per} A(i|j).$$

Voorbeeld 3.1.5. Beschouw de volgende matrix van orde 4:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

We berekenen $\operatorname{per} A$ met behulp van de expansiestelling van Laplace. Zij $r = 2$ en $\alpha = (1, 2)$. Dan vinden we: $Q_{2,4} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ en

$$\begin{aligned} \operatorname{per} A &= \operatorname{per} A[1,2|1,2] \;\operatorname{per} A(1,2|1,2) + \operatorname{per} A[1,3|1,2] \;\operatorname{per} A(1,3|1,2) \\ &\quad + \operatorname{per} A[1,4|1,2] \;\operatorname{per} A(1,4|1,2) + \operatorname{per} A[2,3|1,2] \;\operatorname{per} A(2,3|1,2) \\ &\quad + \operatorname{per} A[2,4|1,2] \;\operatorname{per} A(2,4|1,2) + \operatorname{per} A[3,4|1,2] \;\operatorname{per} A(3,4|1,2) \\ &= 1 \cdot 8 + 8 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 4 \cdot 8 + 0 \cdot 12 + 4 \cdot (-1) \\ &= 47. \end{aligned}$$

Aanvulling voor de leerkracht.
Losstaand van de expansiestelling van Laplace, kunnen onderstaande oefeningen worden gemaakt met behulp van het analogon van de klassieke ontwikkeling naar een rij of kolom (overeenkomend met een specifiek geval van Stelling 3.1.4). Het is nuttig om de leerlingen deze methode in het bijzonder mee te geven voor de berekening van de permanent van een matrix van orde 4 of groter of als een alternatieve manier voor de evaluatie van de permanent van een matrix van orde 3.

Oefening 3.1.6. Ontwikkel de matrix A uit Voorbeeld 3.1.5 naar de eerste rij.

Oplossing. We merken op dat $Q_{1,4} = \{(1), (2), (3), (4)\}$ en berekenen:

$$\begin{aligned} \operatorname{per} A &= \operatorname{per} A[1|1] \;\operatorname{per} A(1|1) + \operatorname{per} A[1|2] \;\operatorname{per} A(1|2) \\ &\quad + \operatorname{per} A[1|3] \;\operatorname{per} A(1|3) + \operatorname{per} A[1|4] \;\operatorname{per} A(1|4) \\ &= 2 \cdot \operatorname{per} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) + 1 \cdot \operatorname{per} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) + 0 + 1 \cdot \operatorname{per} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \\ &= 2 \cdot 13 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot 9 \\ &= 47. \end{aligned}$$

Oefening 3.1.7. Herbereken de permanenten van matrices B en C uit Oefening 1.4.1 door de matrices te ontwikkelen met behulp van de stelling van Laplace.

3.2 Alternatieve methodes

De berekening van de permanent van een $n \times n$-matrix met behulp van de definitie of met de ontwikkeling van Laplace is voor grote n een heel tijdsrovend proces, zelfs voor computers. Het is dan ook niet verwonderlijk dat pogingen ondernomen zijn om de complexiteit van het berekenen van permanenten te reduceren.
Zo ontwikkelde de Australische wiskundige David G. Glynn in 2010 bijvoorbeeld enkele alternatieve formules om de permanent van een $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ te berekenen. De eenvoudigste van deze formules luidt, met $\mathbb{B}_n = \{v = (v_1, \ldots, v_n) \in \{-1,1\}^n \mid v_1 = 1\}$:

$$\operatorname{per} A = 2^{1-n} \sum_{v \in \mathbb{B}_n} \left(\prod_{j=1}^{n} v_j \right) \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j.$$

Aanvulling voor de leerkracht.
De volgende oefening verschaft de leerlingen geen grootse inzichten in theorie omtrent permanenten, maar draagt voornamelijk bij tot gewenning aan onder meer de som- en productnotatie, die in deze context frequent voorkomen. De leerlingen hebben waarschijnlijk amper voeling met deze notaties (en al zeker niet met de manier waarop $\mathbb{B}_n$ is gedefinieerd); vandaar dat dit een uitbreidingsoefening betreft, die sterk begeleid dient te worden wanneer hij wordt gemaakt.

Oefening 3.2.1. Ga de correctheid van bovenstaande formule na voor de permanent van een willekeurige 2×2-matrix.

Oplossing. Zij $A = (a_{ij})$ een matrix van orde $n = 2$. Dan is $\mathbb{B}_n = \{(1,-1),(1,1)\}$. Noem $v := (v_1, v_2) = (1,-1)$ en $w := (w_1, w_2) = (1,1)$. Met de formule van Glynn vinden we:

$$\begin{aligned}
\operatorname{per} A &= 2^{-1} \left(v_1 v_2 \left(\prod_{i=1}^{2} a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 \right) + w_1 w_2 \left(\prod_{i=1}^{2} a_{i1} w_1 + a_{i2} w_2 \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \big(-1(a_{11} - a_{12})(a_{21} - a_{22}) + 1(a_{11} + a_{12})(a_{21} + a_{22}) \big) \\
&= a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}.
\end{aligned}$$

4 Afschattingen

Juist omwille van de moeilijkheid van het berekenen van permanenten, hebben verschillende wiskundigen gezocht naar boven- en ondergrenzen om permanenten te benaderen. Tot op vandaag blijven er echter nog veel uitspraken of afschattingen met betrekking tot permanenten onbewezen, hoewel het vermoeden dat ze correct zijn vaak groot is. Door enkele vrij recente ontwikkelingen die lang bestaande vermoedens konden bevestigen of ontkrachten, is er de voorbije decennia een hernieuwde interesse ontstaan in (begrenzingen met betrekking tot) permanenten.

4.1 Inleidende begrenzingen

Aanvulling voor de leerkracht.
De ongelijkheden worden bij voorkeur met een onderwijsleergesprek door de leerkracht aan bord gebracht en door de leerlingen in hun cursus genoteerd.

We tonen een eerste basisafschatting aan.

Stelling 4.1.1. *Zij A een willekeurige vierkante matrix. Dan geldt:*

$$|\operatorname{per} A| \leq \operatorname{per}|A|.$$

Bewijs. STAP 1. Bewijs de driehoeksongelijkheid: voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt: $|x+y| \leq |x|+|y|$.
Oplossing stap 1. Per definitie van de absolute waarde geldt enerzijds dat $-x \leq |x|$ en $-y \leq |y|$, waaruit na optelling van beide leden van de ongelijkheid volgt dat $-x-y \leq |x|+|y|$. Anderzijds geldt ook dat $x \leq |x|$ en $y \leq |y|$, waaruit $x+y \leq |x|+|y|$ volgt. Omdat ofwel $|x+y| = x+y$ ofwel $|x+y| = -x-y$, besluiten we dat $|x+y| \leq |x|+|y|$.

STAP 2. Hoe volgt het gestelde nu uit de veralgemening van de driehoeksongelijkheid?
Oplossing stap 2. Dan volgt dat voor alle $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ ook geldt: $|x_1 + \ldots + x_m| \leq |x_1| + \ldots + |x_m|$, zodat we deze afschatting kunnen toepassen op de termen bij de uitwerking van de permanent en het gestelde zal volgen. □

In wiskundige artikels uit de negentiende eeuw verschenen permanenten in ongelijkheden vaak in combinatie met determinanten. De bewijzen zijn dikwijls lang en complex. Een elementair resultaat zullen we hier echter wel bewijzen.

Stelling 4.1.2. *Zij $A = (a_{ij})$ een $n \times n$-matrix met $a_{ij} \geq 0$ voor elk element van A. Dan geldt:*

$$|\det A| \leq \operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} r_i,$$

waarbij r_i de som van de elementen op de i-de rij van A voorstelt, dus $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

Bewijs. STAP 1. Bewijs de eerste ongelijkheid met behulp van de driehoeksongelijkheid in de volgende vorm: $|a-b| \leq |a|+|b|$.
Oplossing stap 1. De driehoeksongelijkheid zegt ons dat voor alle reële a, b geldt dat $|a-b| \leq |a|+|b|$. Omdat alle elementen van A groter dan of gelijk aan nul verondersteld worden, volgt dat $|\det A| \leq \operatorname{per} A$ per definitie van de determinant en de permanent van A. Hierbij duidden we met a immers de $n!/2$ positieve termen in de uitwerking van $\det A$ aan die gepaard gaan met een positief teken en met b de $n!/2$ positieve termen in de uitwerking van $\det A$ gepaard gaande met een negatief teken.

Aanvulling voor de leerkracht.
Het bewijs van de driehoeksongelijkheid in de bovenstaande tweede vorm kan als vrijblijvende of differentiatie-oefening aan de leerlingen worden meegegeven. Het verdient waarschijnlijk wel klassikale aandacht om de leerlingen er attent op te maken dat het geen direct gevolg uit de eerste driehoeksongelijkheid is: een bewering zoals $|a-b| \leq |a+b|$ is immers foutief en eenvoudig in te zien met een concreet getallenvoorbeeld waarbij $a < 0$ en $b > 0$.

STAP 2. Bewijs de tweede ongelijkheid door gebruik te maken van de distributieve uitwerking van het product van alle rijsommen van A.
Oplossing stap 2. De $n!$ termen die men bekomt bij de berekening van de permanent van een $n \times n$-matrix vormen steeds een deelverzameling van de n^n termen die men verkrijgt door het product van de rijsommen van die matrix distributief uit te werken. Aangezien alle elementen van A groter dan of gelijk zijn aan nul, volgt nu de rechtse ongelijkheid. □

Aanvulling voor de leerkracht.
De uitwerking van de bovenstaande stap voor een 2×2-matrix kan voor de leerlingen inzichtelijk werken om tot de algemenere uitspraak te komen.

4.2 Binaire matrices

Definitie 4.2.1. Een **binaire matrix** of **(0,1)-matrix** is een matrix waarin elk element gelijk is aan 0 of 1.

Binaire matrices spelen onder meer een interessante rol in lineaire algebra en combinatoriek. Deze matrices vormen daarom vaak een aparte categorie waarbinnen gezocht wordt naar boven- en ondergrenzen voor de permanent.

Aanvulling voor de leerkracht.
Om de gedachten te vestigen, kan de leerkracht ter illustratie enkele binaire matrices aan bord noteren. De werkvorm die hierop volgt: de leerlingen krijgen in groepjes van ongeveer drie even tijd om de volgende vraagjes te beantwoorden. Er zijn veel meerwaarden aan samenwerken op dit vlak verbonden: het leren waarderen van een andere aanpak, het vinden en vergelijken van verschillende (tegen)voorbeelden, eigen inzichten wiskundig onder woorden leren brengen, enz. De leerkracht stapt rond en probeert de leerlingen gegronde verklaringen voor hun resultaten te laten vinden. De antwoorden en verklaringen worden achteraf klassikaal overlopen.

Vraag 4.2.2. Wat is de maximale waarde die de permanent van een vierkante binaire matrix van orde n kan bereiken? Wordt deze waarde bereikt voor een unieke binaire matrix?

Oplossing. Stelling 4.1.2 indachtig proberen we de rijsommen te maximaliseren. In een binaire matrix komt dit dus neer op zoveel mogelijk elementen in de matrix gelijk te stellen aan enen. De maximale waarde wordt bijgevolg bereikt voor de unieke binaire matrix waarin elk element gelijk is aan 1; noteer deze matrix als J. Aangezien $|S_n| = n!$, volgt per definitie van de permanent dat per $J = n!$.

Vraag 4.2.3. Wat is de minimale waarde die de permanent van een vierkante binaire matrix van orde n kan bereiken? Wordt deze waarde bereikt voor een unieke binaire matrix?

Oplossing. Omdat een binaire matrix enkel nullen en enen als elementen bevat en de permanent per definitie wordt berekend als de som van de diagonaalproducten, wordt deze minimale waarde gegeven door 0. Deze waarde wordt niet bereikt voor een unieke binaire matrix, maar onder meer voor elke binaire matrix die een nulrij of nulkolom bevat.

4.3 Dubbelstochastische matrices

Aanvulling voor de leerkracht.
Deze definities kunnen met een onderwijsleergesprek worden ingeleid. De verbanden tussen de definities worden door de leerkracht geduid, zoals: elke rij-, kolom- en dubbelstochastische matrix is in het bijzonder stochastisch; een dubbelstochastische matrix is de combinatie van een rij- en een kolomstochastische matrix; enz.

Definitie 4.3.1. (i) Een **stochastische matrix**, ook wel een waarschijnlijkheidsmatrix of overgangsmatrix genoemd, is een matrix (a_{ij}) waar voor alle i, j geldt dat $0 \leq a_{ij} \leq 1$.

(ii) Een **rijstochastische matrix** is een matrix (a_{ij}) waar voor alle i, j geldt dat $0 \leq a_{ij}$ en $\sum_j a_{ij} = 1$, dus waarvoor elke rijsom gelijk is aan 1.

(iii) Analoog definieert men een **kolomstochastische matrix** als een matrix (a_{ij}) waar voor alle i, j geldt dat $0 \leq a_{ij}$ en $\sum_i a_{ij} = 1$, dus met de kolomsommen gelijk aan aan 1.

(iv) Een **dubbelstochastische matrix** is dan een matrix (a_{ij}) waar voor alle i, j geldt dat $0 \leq a_{ij}$ en $\sum_i a_{ij} = \sum_j a_{ij} = 1$.

Ook dubbelstochastische matrices vormen een interessante aparte klasse van matrices, met onder meer toepassingen in de kansberekening.

Aanvulling voor de leerkracht.
Het behandelen van de volgende oefening is sterk aan te raden. Deze is immers in (minstens) twee opzichten interessant: enerzijds is het inzicht in de oplossing van deze oefening verrijkend, anderzijds zal het voor sommige leerlingen een uitdaging zijn om dit inzicht onder woorden te brengen (lees: in correcte symbolische wiskundetaal te noteren). Deze oefening kan zowel in het begin van deze sectie klassikaal worden opgelost als worden aangevat door de leerlingen die met voorsprong op de anderen correct tot de laatste vraag van deze sectie zijn gekomen.

Oefening 4.3.2. Bewijs dat dubbelstochastische matrices altijd vierkante matrices zijn.

Oplossing. Zij $A = (a_{ij})$ een dubbelstochastische $n \times m$-matrix. Dan weten we dat $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ voor alle $1 \leq j \leq m$ en $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1$ voor alle $1 \leq i \leq n$. De som van alle elementen van A is enerzijds gelijk aan de som van alle rijen van A, dus gelijk aan $\sum_{j=1}^{m}(a_{1j} + \ldots + a_{nj}) = n$. Anderzijds kunnen we de som van alle elementen van A ook bekomen als de som van alle kolommen van A, dus $\sum_{i=1}^{m}(a_{i1} + \ldots + a_{in}) = m$. We besluiten dat $n = m$, dus A is een vierkante matrix.

Aanvulling voor de leerkracht.
Voor de onderstaande vraagjes wordt bij voorkeur dezelfde werkvorm als voorheen gebruikt.

Vraag 4.3.3. Wat is de maximale waarde die de permanent van een dubbelstochastische matrix van orde n kan bereiken? Wordt deze waarde bereikt voor een unieke dubbelstochastische matrix?

Oplossing. Deze maximale waarde is per definitie van een dubbelstochastische matrix en Stelling 4.1.2 gelijk aan 1 en wordt bijvoorbeeld bereikt voor de eenheidsmatrix van orde n of algemener voor alle permutatiematrices van orde n.

Vraag 4.3.4. Wat is de minimale waarde die de permanent van een dubbelstochastische matrix van orde n kan bereiken? Wordt deze waarde bereikt voor een unieke dubbelstochastische matrix?

Oplossing. Deze waarde wordt bereikt voor de unieke $n \times n$-matrix waarin elke element gelijk is aan $\frac{1}{n}$; we noteren deze matrix gebruikelijk als J_n. Het product van alle diagonaalelementen van J_n is dan gelijk aan $\left(\frac{1}{n}\right)^n$ en bijgevolg vinden we: $\mathrm{per}(J_n) = \frac{n!}{n^n}$.
Dit antwoord op de vraag is absoluut geen evidentie om te bewijzen. Het is decennialang een open probleem geweest en stond bekend als het befaamde vermoeden van de Nederlandse wiskundige Bartel Leendert van der Waerden: geformuleerd in 1926 en vele invalshoeken en verschillende wiskundigen later op een eerste manier bewezen in 1981.

E Evaluatiedocument leerling

Beoordeel onderstaande uitspraken volgens hoe jij de lessenreeks over permanenten ervaren hebt.

Gebruik daarvoor deze puntenschaal:
1 = helemaal niet akkoord, 2 = eerder niet akkoord, 3 = eerder akkoord, 4 = helemaal akkoord.

INHOUDELIJK

Ik vond het onderwerp intellectueel uitdagend.	1	2	3	4
Ik had moeite om te volgen met de nieuwe (abstracte) concepten en notaties.	1	2	3	4
Ik vond de leerstof te moeilijk.	1	2	3	4

Aanvullingen, opmerkingen en/of suggesties over de inhoud van de leerstof:

DIDACTISCH

De lesgever kon de leerstof op gepassioneerde/enthousiaste wijze overbrengen.	1	2	3	4
De lesgever kon de nieuwe wiskundige concepten duidelijk uitleggen.	1	2	3	4
De lesgever had aandacht voor vragen en opmerkingen van leerlingen.	1	2	3	4
De lessen en bijhorende cursus waren goed gestructureerd.	1	2	3	4
Het lestempo lag doorgaans te hoog.	1	2	3	4

Aanvullingen, opmerkingen en/of suggesties over het overbrengen van de leerstof:

F Evaluatiedocument leerkracht

Beoordeel onderstaande uitspraken volgens hoe u de lessenreeks over permanenten ervaren heeft.

Gebruik daarvoor deze puntenschaal:
1 = helemaal niet akkoord, 2 = eerder niet akkoord, 3 = eerder akkoord, 4 = helemaal akkoord.

INHOUDELIJK

Het onderwerp was voor de leerlingen intellectueel uitdagend.	1	2	3	4
De nieuwe (abstracte) concepten en notaties waren aangepast aan hun niveau.	1	2	3	4
De leerstof was te moeilijk voor de leerlingen.	1	2	3	4

Aanvullingen, opmerkingen en/of suggesties over de inhoud van de leerstof:

DIDACTISCH

De lesgever kon de leerstof op gepassioneerde/enthousiaste wijze overbrengen.	1	2	3	4
De lesgever kon de nieuwe wiskundige concepten duidelijk uitleggen.	1	2	3	4
De lesgever had aandacht voor vragen en opmerkingen van leerlingen.	1	2	3	4
De lesgever hanteerde verschillende, geschikte werkvormen.	1	2	3	4
De lessen en bijhorende cursus waren goed gestructureerd.	1	2	3	4
Het lestempo lag doorgaans te hoog.	1	2	3	4

Aanvullingen, opmerkingen en/of suggesties over het overbrengen van de leerstof:

G Test - groep A: opgaven en oplossingen

DON BOSCOCOLLEGE ZWIJNAARDE	Vak: seminarie wiskunde	Naam:
	DW: Permanenten	Leerkracht: mnr. De Kerpel

Je mag je cursus over permanenten gebruiken, maar verlies geen kostbare tijd met opzoekwerk. Lees aandachtig onderstaande opgaven. Noteer je antwoorden op een apart DW-blad. Veel succes!

1. (2 ptn) Bereken de permanent van de matrix $M = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. (2 ptn) Zij P een $n \times n$-permutatiematrix. Onder welke voorwaarde(n) op de orde van P geldt: $\operatorname{per} P = \operatorname{per}(-P)$? Verklaar je antwoord.

3. (4 ptn) Zijn de volgende uitspraken juist of fout? Geef een bewijs voor een correcte bewering en vind een tegenvoorbeeld voor een valse uitspraak.

   (a) De enige dubbelstochastische bovendriehoeksmatrix van orde 2 is de eenheidsmatrix.

   (b) Voor elke binaire 3×3-matrix is de permanent van die matrix gelijk aan de determinant.

4. (2 ptn) Wat is de minimale waarde die de permanent van een rijstochastische matrix kan bereiken? Wordt deze waarde bereikt voor een unieke matrix? Verklaar beide antwoorden.

DON BOSCOCOLLEGE
ZWIJNAARDE

Vak: seminarie wiskunde Leerkracht: mnr. De Kerpel

DW: Permanenten (oplossingen)

1. (2 ptn) Bereken de permanent van de matrix $M = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Oplossing. We berekenen de permanent van M door ontwikkeling naar de derde rij:
   $$\operatorname{per} M = -2 \ \operatorname{per} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} = -2\,(-6+42-12+48-63-1) = -2 \cdot 8 = -16.$$

   Puntenverdeling. Er wordt 0.5 punt toegekend voor de ontwikkeling (naar een andere rij of kolom is uiteraard ook mogelijk), 1 punt voor de correcte toepassing van een methode voor de berekening(en) van de permanent van een 3×3-matrix bij de verdere uitwerking en 0.5 punt voor het eindresultaat.
   Doelstelling. LD2 – De leerlingen kunnen de permanent van een matrix berekenen.

2. (2 ptn) Zij P een $n \times n$-permutatiematrix. Onder welke voorwaarde(n) op de orde van P geldt: $\operatorname{per} P = \operatorname{per}(-P)$? Verklaar je antwoord.

   Oplossing. Uit de eigenschap van permanenten aangaande vermenigvuldigen van een matrix met een reëel getal halen we: $\operatorname{per}(-P) = (-1)^n \operatorname{per} P$. Enkel wanneer P een permutatiematrix is van even orde geldt bijgevolg: $\operatorname{per}(-P) = \operatorname{per} P \ (= 1)$.

   Puntenverdeling. De twee stappen in bovenstaande redenering leveren elk 1 punt op.
   Doelstellingen. LD3 – De leerlingen kennen en herkennen enkele bijzondere matrices.
   LD6 – De leerlingen kunnen rekenregels voor de berekening van permanenten toepassen.

3. (4 ptn) Zijn de volgende uitspraken juist of fout? Geef een bewijs voor een correcte bewering en vind een tegenvoorbeeld voor een valse uitspraak.

   (a) De enige dubbelstochastische bovendriehoeksmatrix van orde 2 is de eenheidsmatrix.

   Oplossing. Correct. Bewijs: een 2×2-bovendriehoeksmatrix is van de vorm $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$, met a, b, c willekeurige reële getallen (0.5pt). Opdat de matrix dubbelstochastisch zou zijn, moet $a = 1$ (kolomstochastisch) (0.5pt) en $c = 1$ (rijstochastisch) (0.5pt). Bijgevolg moet ook $b = 1$ (rijstochastisch/kolomstochastisch) en bekomen we dus de eenheidsmatrix (0.5pt).

Puntenverdeling. Halve punten worden toegekend per gevonden stap (zie hierboven).
Doelstellingen. LD3 – De leerlingen kennen en herkennen enkele bijzondere matrices.
LD4 – De leerlingen kunnen de correctheid van een wiskundige bewering nagaan door het construeren van een tegenvoorbeeld of het opstellen van een bewijs.

(b) Voor elke binaire 3×3-matrix is de permanent van die matrix gelijk aan de determinant.

Oplossing. Fout. Ook $\det B < \operatorname{per} B$ is mogelijk, bijvoorbeeld voor $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Puntenverdeling. Beweren dat de uitspraak fout is zonder verdere uitleg of met een fout tegenvoorbeeld, levert 0.5/2 op. Voor het inzicht dat de bewering fout is met een correcte redenering maar zonder concreet tegenvoorbeeld, krijgt de leerling 1/2. Voor het geven van een tegenvoorbeeld bij deze foute uitspraak wordt 2/2 toegekend.
Doelstellingen. LD3 – De leerlingen kennen en herkennen enkele bijzondere matrices.
LD4 – De leerlingen kunnen de correctheid van een wiskundige bewering nagaan door het construeren van een tegenvoorbeeld of het opstellen van een bewijs.

4. (2 ptn) Wat is de minimale waarde die de permanent van een rijstochastische matrix kan bereiken? Wordt deze waarde bereikt voor een unieke matrix? Verklaar beide antwoorden.

Oplossing. De minimale waarde van de permanent kan niet kleiner zijn dan 0 wegens het feit dat elk element van een rijstochastische matrix niet-negatief is en per definitie van de permanent. De minimale waarde is bijgevolg 0 zodra de matrix bijvoorbeeld een nulkolom bevat, wat mogelijk is voor een rijstochastische matrix. Concreet: voor een rijstochastische 2×2-matrix wordt deze waarde bereikt voor $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dus niet voor een unieke $n \times n$-matrix.

Puntenverdeling. Er wordt 0.5 punt per juist beantwoorde vraag toegekend en nog eens 0.5 punt per correcte verklaring/concretisering.
Doelstellingen. LD3 – De leerlingen kennen en herkennen enkele bijzondere matrices.
LD8 – De leerlingen kunnen inzicht verwerven in een nieuwe definitie door vragen daaromtrent te onderzoeken.

H Test - groep B: opgaven en oplossingen

DON BOSCOCOLLEGE ZWIJNAARDE

Vak: seminarie wiskunde | Naam:

DW: Permanenten | Leerkracht: mevr. Van Herpe

Je mag je cursus over permanenten gebruiken, maar verlies geen kostbare tijd met opzoekwerk. Lees aandachtig onderstaande opgaven. Noteer je antwoorden op een apart DW-blad.
Veel succes!

1. (2 ptn) Bereken de permanent van de matrix $M = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. (2 ptn) Zij B een $n \times n$-matrix. Onder welke voorwaarde(n) op de orde van B geldt: $-\operatorname{per} B = \operatorname{per}(-B)$? Verklaar je antwoord.

3. (4 ptn) Zijn de volgende uitspraken juist of fout? Geef een bewijs voor een correcte bewering en vind een tegenvoorbeeld voor een valse uitspraak.
   (a) Voor elke 3×3-permutatiematrix P verschillend van de eenheidsmatrix geldt: $\operatorname{per}(P^2) > \operatorname{per} P$.
   (b) Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ bestaat er slechts één binaire $n \times n$-diagonaalmatrix D waarvoor $\operatorname{per} D \neq 0$.

4. (2 ptn) Wat is de minimale waarde die de permanent van een kolomstochastische matrix kan bereiken? Wordt deze waarde bereikt voor een unieke matrix? Verklaar beide antwoorden.

Vak: seminarie wiskunde Leerkracht: mevr. Van Herpe

DW: Permanenten (oplossingen)

1. (2 ptn) Bereken de permanent van de matrix $M = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Oplossing. We berekenen de permanent van M door ontwikkeling naar de derde rij:

   $$\operatorname{per} M = 2 \operatorname{per} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 2\,(-6 - 42 - 12 - 48 - 63 - 1) = 2 \cdot (-172) = -344.$$

   Puntenverdeling. Er wordt 0.5 punt toegekend voor de ontwikkeling (naar een andere rij of kolom is uiteraard ook mogelijk), 1 punt voor de correcte toepassing van een methode voor de berekening(en) van de permanent van een 3×3-matrix bij de verdere uitwerking en 0.5 punt voor het eindresultaat.
   Doelstelling. LD2 – De leerlingen kunnen de permanent van een matrix berekenen.

2. (2 ptn) Zij B een $n \times n$-matrix. Onder welke voorwaarde(n) op de orde van B geldt: $-\operatorname{per} B = \operatorname{per}(-B)$? Verklaar je antwoord.

   Oplossing. Uit de eigenschap van permanenten aangaande vermenigvuldigen van een matrix met een reëel getal halen we: $\operatorname{per}(-B) = (-1)^n \operatorname{per} B$. Enkel wanneer B een matrix is van oneven orde geldt bijgevolg: $\operatorname{per}(-B) = -\operatorname{per} B$.

   Puntenverdeling. De twee stappen in bovenstaande redenering leveren elk 1 punt op.
   Doelstelling. LD6 – De leerlingen kunnen rekenregels voor de berekening van permanenten toepassen.

3. (4 ptn) Zijn de volgende uitspraken juist of fout? Geef een bewijs voor een correcte bewering en vind een tegenvoorbeeld voor een valse uitspraak.

   (a) Voor elke 3×3-permutatiematrix P verschillend van de eenheidsmatrix geldt: $\operatorname{per}(P^2) > \operatorname{per} P$.

   Oplossing. Fout. Een tegenvoorbeeld wordt gegeven voor elke permutatiematrix, dus bijvoorbeeld voor $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (Producten van permutatiematrices leveren immers opnieuw permutatiematrices op, dus de bewering zou een gelijkheid moeten zijn, die altijd de waarde 1 aanneemt.)

Puntenverdeling. Beweren dat de uitspraak fout is zonder verdere uitleg of met een fout tegenvoorbeeld, levert 0.5/2 op. Voor het inzicht dat de bewering fout is met een correcte redenering maar zonder concreet tegenvoorbeeld, krijgt de leerling 1/2. Voor het geven van een tegenvoorbeeld bij deze foute uitspraak wordt 2/2 toegekend.
Doelstellingen. LD3 − De leerlingen kennen en herkennen enkele bijzondere matrices.
LD4 − De leerlingen kunnen de correctheid van een wiskundige bewering nagaan door het construeren van een tegenvoorbeeld of het opstellen van een bewijs.

(b) Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ bestaat er slechts één binaire $n \times n$-diagonaalmatrix D waarvoor per $D \neq 0$.

Oplossing. Correct. Bewijs: de permanent van een diagonaalmatrix is het product van de diagonaalelementen (0.5pt). Aangezien de diagonaalmatrix binair verondersteld wordt, zijn de enige elementen die op de diagonaal kunnen staan gelijk aan 0 of 1 (0.5pt). Het product van de diagonaalelementen is bijgevolg enkel verschillend van 0 in het geval dat er allemaal enen op de diagonaal staan (0.5pt), dus enkel wanneer $D = I_n$ (0.5pt).

Puntenverdeling. Halve punten worden toegekend per gevonden stap (zie hierboven).
Doelstellingen. LD3 − De leerlingen kennen en herkennen enkele bijzondere matrices.
LD4 − De leerlingen kunnen de correctheid van een wiskundige bewering nagaan door het construeren van een tegenvoorbeeld of het opstellen van een bewijs.

4. (2 ptn) Wat is de minimale waarde die de permanent van een kolomstochastische matrix kan bereiken? Wordt deze waarde bereikt voor een unieke matrix? Verklaar beide antwoorden.

Oplossing. De minimale waarde van de permanent kan niet kleiner zijn dan 0 wegens het feit dat elk element van een kolomstochastische matrix niet-negatief is en per definitie van de permanent. De minimale waarde is bijgevolg 0 zodra de matrix bijvoorbeeld een nulrij bevat, wat mogelijk is voor een kolomstochastische matrix. Concreet: voor een kolomstochastische 2×2-matrix wordt deze waarde bereikt voor $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ of $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dus niet voor een unieke $n \times n$-matrix.

Puntenverdeling. Er wordt 0.5 punt per juist beantwoorde vraag toegekend en nog eens 0.5 punt per correcte verklaring/concretisering.
Doelstellingen. LD3 − De leerlingen kennen en herkennen enkele bijzondere matrices.
LD8 − De leerlingen kunnen inzicht verwerven in een nieuwe definitie door vragen daaromtrent te onderzoeken.

Referenties

[1] Dimitri P. Bertsekas. *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1982.

[2] JPM Binet. Memoire sur un systeme de formules analytiques, et leur application ades considerations geometriques. *L'Ecole Politechnique, Paris, France*, pages 280–354, 1812.

[3] Jan Brandts. De permanent van een matrix. *Lineaire Algebra 2*, pages 1–7, Universiteit van Amsterdam, 2016.

[4] Richard A. Brualdi and John L. Goldwasser. Permanent of the Laplacian matrix of trees and bipartite graphs. *Discrete Math.*, 48(1):1–21, 1984.

[5] Garrett Buffington. Polar decomposition of a matrix. *Advanced Linear Algebra (Math 420)*, 2014.

[6] Augustin Louis Cauchy. Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. *Journal de l'Ecole polytechnique*, 10(17):29–112, 1812.

[7] Gi-Sang Cheon and Ian M. Wanless. An update on Minc's survey of open problems involving permanents. *Linear Algebra Appl.*, 403:314–342, 2005.

[8] Gi-Sang Cheon and Ian M. Wanless. Some results towards the Dittert conjecture on permanents. *Linear Algebra Appl.*, 436(4):791–801, 2012.

[9] Gi-Sang Cheon and Haeng-Won Yoon. A note on the dittert conjecture for permanents. In *Int. Math. Forum*, volume 1, pages 1943–1949, 2006.

[10] Jan De Beule. *Discrete Wiskunde*. Universiteit Gent, 2013-2014.

[11] P. J. Eberlein. Remarks on the van der Waerden conjecture. II. *Linear Algebra and Appl.*, 2:311–320, 1969.

[12] Gernot M. Engel and Hans Schneider. Inequalities for determinants and permanents. *Linear and Multilinear Algebra*, 1:187–201, 1973.

[13] Anna Galluccio and Martin Loebl. On the theory of Pfaffian orientations. I. Perfect matchings and permanents. *Electron. J. Combin.*, 6:Research Paper 6, 18, 1999.

[14] Ira Gessel and Gian-Carlo Rota, editors. *Classic papers in combinatorics*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009. Reprint of the 1987 original [MR0904286].

[15] David G. Glynn. The permanent of a square matrix. *European J. Combin.*, 31(7):1887–1891, 2010.

[16] I. P. Goulden and D. M. Jackson. Immanants of combinatorial matrices. *J. Algebra*, 148(2):305–324, 1992.

[17] B. Gyires. On permanent inequalities. In *Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. I*, volume 18 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 471–484. North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.

[18] B. Gyires. The common source of several inequalities concerning doubly stochastic matrices. *Publ. Math. Debrecen*, 27(3-4):291–304, 1980.

[19] B. Gyires. Elementary proof for a van der Waerden's conjecture and related theorems. *Comput. Math. Appl.*, 31(10):7–21, 1996.

[20] Béla Gyires. On inequalities concerning the permanents of matrices. *J. Combinatorics Information Syst. Sci.*, 2(2-3):107–113, 1977.

[21] Marshall Hall, Jr. *Combinatorial theory.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1998. A Wiley-Interscience Publication.

[22] Darald J. Hartfiel. *Nonhomogeneous matrix products.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.

[23] Mike Hermele. Second quantization. *Notes on 2nd Quantization for Physics 7450*, University of Colorado, 2010.

[24] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2013.

[25] Suk Geun Hwang. The monotonicity of and the Doković conjectures on permanents of doubly stochastic matrices. *Linear Algebra Appl.*, 79:127–151, 1986.

[26] Suk Geun Hwang. A note on a conjecture on permanents. *Linear Algebra Appl.*, 76:31–44, 1986.

[27] Suk Geun Hwang. On a conjecture of E. Dittert. *Linear Algebra Appl.*, 95:161–169, 1987.

[28] Mark Jerrum and Alistair Sinclair. Approximating the permanent. *SIAM J. Comput.*, 18(6):1149–1178, 1989.

[29] Irving Kaplansky. Solution of the "problème des ménages.". *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49:784–785, 1943.

[30] Lefteris Kirousis and Georgios Kontogeorgiou. The *problème des ménages* revisited. National and Kapodistrian University of Athens, 2016.

[31] M. Lewin. On nonnegative matrices. *Pacific J. Math.*, 36:753–759, 1971.

[32] Heng Liang and Fengshan Bai. An upper bound for the permanent of $(0, 1)$-matrices. *Linear Algebra Appl.*, 377:291–295, 2004.

[33] David London. Some notes on the van der Waerden conjecture. *Linear Algebra and Appl.*, 4:155–160, 1971.

[34] Marvin Marcus. The permanent analogue of the Hadamard determinant theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69:494–496, 1963.

[35] Marvin Marcus and Henryk Minc. Permanents. *The American Mathematical Monthly*, 72(6):577–591, 1965.

[36] Marvin Marcus and Morris Newman. On the minimum of the permanent of a doubly stochastic matrix. *Duke Math. J.*, 26:61–72, 1959.

[37] Robert Dee McMillan. The permanent function. Faculty of the Graduate College of the Oklahoma State University, 1969.

[38] Henryk Minc. Upper bounds for permanents of (0, 1)-matrices. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69:789–791, 1963.

[39] Henryk Minc. *Permanents*, volume 6 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978. With a foreword by Marvin Marcus.

[40] Thomas Muir. 4. On a Class of Permanent Symmetric Functions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 11:409–418, 1882.

[41] Vladimir N. Sachkov. *Probabilistic methods in combinatorial analysis*, volume 56 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Translated from the Russian, Revised by the author.

[42] D. W. Sasser and M. L. Slater. On a generalization of the van der Waerden conjecture. *Portugal. Math.*, 28:91–95, 1969.

[43] A. Schrijver. A short proof of Minc's conjecture. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 25(1):80–83, 1978.

[44] I. Schur. Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen. *Math. Z.*, 1(2-3):184–207, 1918.

[45] Richard Sinkhorn. A problem related to the van der Waerden permanent theorem. *Linear and Multilinear Algebra*, 16(1-4):167–173, 1984.

[46] J. R. Stembridge. Some conjectures for immanants. *Canad. J. Math.*, 44(5):1079–1099, 1992.

[47] John R. Stembridge. Immanants of totally positive matrices are nonnegative. *Bull. London Math. Soc.*, 23(5):422–428, 1991.

[48] Koen Thas and Bart De Bruyn. *Lineaire algebra en analytische meetkunde 2*. Universiteit Gent, 2014.

[49] L. G. Valiant. The complexity of computing the permanent. *Theoret. Comput. Sci.*, 8(2):189–201, 1979.

[50] J. H. van Lint. Notes on Egoritsjev's proof of the van der Waerden conjecture. *Linear Algebra Appl.*, 39:1–8, 1981.

[51] J. H. van Lint. The van der Waerden conjecture: two proofs in one year. *Math. Intelligencer*, 4(2):72–77, 1982.

[52] Herbert S. Wilf. Divisibility properties of the permanent function. *Journal of Combinatorial Theory*, 4:194–197, 1968.

[53] Xingzhi Zhan. Open problems in matrix theory. In *Proceedings of the 4th International Congress of Chinese Mathematicians*, volume 1, pages 367–382. Citeseer, 2007.

[54] Fuzhen Zhang. An update on a few permanent conjectures. *Spec. Matrices*, 4:305–316, 2016.